

Fluctuaciones y segregación en una economía formal e informal

María Noelia Romero
Rocío Martínez

June 2016

1. Introducción

El tamaño del sector informal afecta el desarrollo de los países Loayza [1996], la recaudación impositiva y las cuentas nacionales sobre todo en los países de América Latina, donde representa más del 30% del PBI Schneider and Enste [2000]. En el presente trabajo buscamos analizar el comportamiento de segregación de las firmas en barrios y su repercusión en las fluctuaciones de la economía, teniendo en cuenta que las firmas pueden ser formales o informales, donde entendemos la informalidad como la evasión fiscal de la empresa.

Planteamos un modelo donde las preferencias con respecto a los vecinos influyen en la decisión de los agentes respecto a quedarse donde están o moverse geográficamente a otro sector. Observamos cómo las decisiones individuales, regidas por preferencias específicas, influyen en las fluctuaciones a nivel agregado y la estabilidad de la economía. Realizamos el ejercicio midiendo la producción agregada, formal e informal.

En el trabajo utilizamos el modelo de preferencias residenciales de Schelling [1971], donde se asume que la información es perfecta y que los individuos buscan ser mayoría. Los agentes poseen preferencia por vecindarios que comparten sus características. Se asume que si algunos, pero no todos, los miembros de un grupo se encuentran insatisfechos, entonces estos van a intentar trasladarse a zonas en las cuales se encontrarían satisfechos. Intuitivamente, se puede pensar que aquellos individuos que comparten ciertas características, van a tener una utilidad mayor al juntarse entre ellos. En nuestro caso, las firmas formales encontrarán beneficios de mantenerse “cerca” de otras firmas formales para poder comerciar.

El modelo de Bak et al. [1993] caracteriza un sistema crítico autorganizado, donde estudian cómo las fluctuaciones en la actividad económica agregada pueden ser causadas por pequeños shocks a determinados sectores de mercado. Se asumen dos supuestos claves: *i*) la interacción local entre unidades productivas (conectadas a través de relación de proveedores) e *ii*) desarrollo tecnológico no convexo. En el modelo, se considera que la forma más eficiente de producción es aquella en la cual se fabrican dos unidades por vez. Se supone que dos unidades de output requieren dos unidades de input, una de cada proveedor. Se producen dos unidades sólo si la demanda no puede ser cubierta por el stock existente. De esta forma, la función de output depende de los inventarios al inicio del periodo y del número de órdenes recibidas. A diferencia de Bak et al. [1993], a la ley de movimiento de inventario le asociamos una restricción de intercambio según si la firma se encuentra registrada o no. Las firmas formales sólo le demandan insumos a firmas de su misma condición al igual que las informales.

Obtuvimos como resultado la segregación de los dos tipos de firmas en la economía formándose vecindarios caracterizados por firmas formales y otros por informales. La introducción de

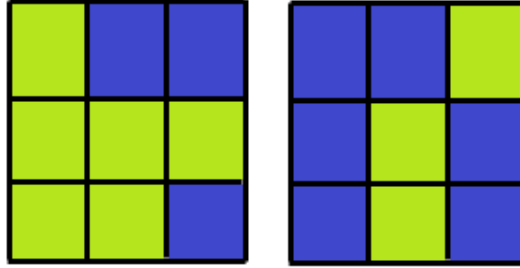


Figura 1: Vecindario de las unidades de producción

restricciones de intercambio entre las firma de distinto tipo, dio lugar a una economía más inestable con más unidades productivas en estado crítico. Además, la distribución del tamaño de las avalanchas parece obedecer una ley de potencia de exponente -1 , aunque su relación es menos clara para el sector formal e informal.

El resto del trabajo se organiza de la siguiente forma: en la sección 2 se especificarán las características del modelo, los algoritmos y restricciones a tener en cuenta. En la sección 3 se presentan los resultados e implicancias, finalizando con las limitaciones y conclusiones importantes la sección 4.

2. Modelo

2.1. Ordenamiento segregado de las firmas

Utilizamos el modelo de Schelling [1971] de modo que se configure una red de firmas formales e informales como instancia previa a intercambiar bienes entre las distintas etapas productivas. En nuestro modelo las unidades de producción están ubicadas en una grilla cilíndrica, donde a cada unidad se le puede asignar una coordenada (i, j) con $i, j = 1, 2, \dots, N$. Denotamos las filas con i , las cuales serían distintas etapas productivas, y las columnas con j representando los sectores de una economía. De manera aleatoria, a cada lugar se asigna un tipo de firma: formal o informal. Cada firma (i, j) cuenta con una vecindad conformada por ocho vecinos con los que están en contacto.

De Paula and Scheinkman [2009] modelan la decisión de las firmas formales de vender y comprar a firmas formales. Teniendo en cuenta dicha implicancia de su modelo y suponiendo que existen las preferencias de segregación, las firmas desean ubicarse en un sector y etapa productiva donde haya mayoría de firmas de igual tipo para poder comerciar. Esto es, obtienen mayor satisfacción cuando sus vecinos son de igual condición frente a las autoridades.

La figura 1 muestra dos situaciones posibles de ordenamiento. Asignando el color verde a las firmas formales¹ y azul a las firmas informales; en el primer caso, la firma se encuentra con cinco vecinos de igual tipo y tres vecinos informales. Considerando un umbral de tolerancia mayor a 4 vecinos de igual condición, la firma se encuentra *satisfecha*. En cambio, la firma formal del segundo caso cuenta con dos vecinos en el mismo sector, por lo tanto prefiere cambiarse de ubicación.

Partimos del algoritmo de ordenamiento del modelo original:²

¹Dicha asignación se mantendrá para figuras posteriores.

²Ver Anexo 5.1 con el código de Schelling original.

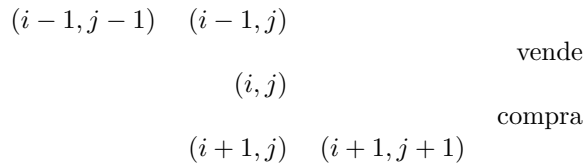
1. Se selecciona al azar dos firmas de diferente tipo.
2. Se computa el grado de satisfacción según la pertenencia a la mayoría de igual condición, donde el umbral puede ser calibrado.
3. Cuando ambos se encuentran descontentos, intercambian lugar. Si ello no ocurre, entonces permanecen en sus lugares.
4. Cuando no se encuentran firmas insatisfechas en un número preestablecido de intentos entonces se deja de buscar pares de firmas, de lo contrario se vuelve al paso 1.

En términos generales, luego de numerosas mudanzas esperamos que se formen *barrios de informalidad*, caracterizados por un agrupamiento de firmas informales. Dicha configuración entre los tipos de firmas favorece la ocurrencia de avalanchas que trataremos en la siguiente sección.

2.2. Dinámica de inventario de las firmas

Una vez conformado el ordenamiento de barrios de informalidad, nos interesa conocer las fluctuaciones de la economía en ambos sectores ante pequeños shocks de demanda de bienes finales.

Mantenemos la interacción local entre las unidades productivas como en Bak et al. [1993], de modo que cada firma venda a pocos clientes y compre a pocos proveedores. Específicamente, como muestra el cuadro 1 cada firma (i, j) vende sus productos a dos firmas vecinas posibles: arriba $(i - 1, j)$ y arriba a la izquierda $(i - 1, j - 1)$ siempre que no se encuentre en la primer fila ($i < 1$). Del mismo modo, la firma representativa compra a la firma de abajo $(i + 1, j)$ y abajo a la derecha $(i + 1, j + 1)$. Hay dos particularidades a tener en cuenta en la grilla de agentes económicos: *i*) las firmas de producción de insumos primarios ubicadas en la última fila $i = N$ no le compra insumos a nadie. En otras palabras, se supone que los insumos primarios de dicha fila siempre están disponibles. *ii*) Las firmas ubicadas en la primer fila $i = 1$ sólo venden a la demanda exógena que reciben.



Cuadro 1: Compra y venta de bienes para la firma (i, j)

Suponemos una tecnología no convexa de las firmas. Es decir, dada la indivisibilidad del producto, la firma produce dos unidades en cada periodo para minimizar costos cuando no se pueda proveer a la demanda con el inventario existente. Cada producción de a dos requiere dos insumos de sus proveedores de la etapa anterior. Intuitivamente, en un período lo suficientemente corto el tiempo esperado de la demanda siguiente es menor que la tasa de descuento de costos futuros. Por eso, aún con descuento las firmas tienen incentivos a producir de a dos.

El costo de mantener una unidad como stock es casi nulo, mientras que el costo de mantener más de una es elevado. Por lo tanto, el estado de inventario de la firma (i, j) , denotado por $x_{ij,t}$ al inicio de cada período t , puede tomar 1 o 0. Siendo $s_{ij,t}$ las unidades vendidas en t e $y_{ij,t}$ la producción en t , la ley de movimiento del inventario es:

$$x_{ij,t+1} = x_{ij,t} + y_{ij,t} - s_{ij,t} \quad (1)$$

En el espacio de unidades productivas de la economía existen 2^{N^2} de posibles estados del inventario, los cuales distribuimos de manera aleatoria para el estado inicial.³ Al mismo tiempo, la producción de cada periodo depende del stock de unidades al inicio del periodo y la demanda de dicho periodo; esto es:

$$y_{ij,t} = y(x_{ij,t}, s_{ij,t}) \quad (2)$$

Por lo tanto, reemplazando 2 en 1 obtenemos:

$$x_{ij,t+1} = x'(x_{ij,t}, s_{ij,t}) \quad (3)$$

El estado inicial del inventario al inicio del período t y las ventas en t determinan los casos en los que se produce. De este modo, el remanente en el inventario al final del periodo t dará lugar al nuevo estado al inicio del período $t + 1$.⁴

Teniendo en cuenta la dinámica de la ley de movimiento y a quiénes le vende la firma (i, j) como muestra el cuadro 1, las demandas que recibe toda firma tal que $i > 1$ pueden expresarse como:

$$s_{ij,t} = \frac{1}{2}(y_{(i-1)j,t} + y_{(i-1),(j-1),t}) \quad (4)$$

En el caso de las firmas productoras de bienes finales ubicadas en la primer fila $i = 1$, las mismas reciben una demanda unitaria exógena determinada de manera aleatoria. Esto es:

$$s_{1j,t} \sim \varepsilon \text{ ruido blanco tal que } s_{1j,t} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

De este modo, las fluctuaciones agregadas se generan a partir de shocks independientes en la última etapa de producción, la tecnología no convexa y la interacción local de las unidades productivas. Las ecuaciones 1 a 4, el estado inicial de inventarios y las restricciones al comercio entre tipos de firmas determinan el nuevo estado de stocks de las firmas. Dicha dinámica que produce cada demanda de productos finales da lugar a la reacción en cadena, cuya longitud de la avalancha dependerá de dos estados:

1. el estado inicial de inventarios,
2. las restricciones de comercio entre las distintas firmas dada la configuración de barrios de informalidad.

Para medir el tamaño de la avalancha se suma la producción de todas las firmas involucradas. Es decir, la producción agregada esta definida por:

$$Y_t = \sum_{i,j} y_{ij,t} \quad (5)$$

Al mismo tiempo, nos interesa conocer las fluctuaciones del producto perteneciente al sector formal e informal, por lo que condicionamos dicha suma al tipo de firma al que pertenecen. De igual manera, calculamos la demanda agregada de los bienes finales en cada período, y las demandas agregadas de cada sector:

³Ver Anexo 5.3 con el código de Bak et al. [1993] adaptado a nuestra economía con sector formal e informal

⁴En la siguiente sección se 2.3 veremos en mayor detalle la dinámica del inventario bajo condiciones particulares de intercambio.

$$N_t = \sum_{i,j} s_{1j,t} \tag{6}$$

Bak et al. [1993] sostienen que dada la distribución de probabilidades del espacio del shock y los vectores independientes de las demandas de bienes finales entre t y $t + 1$, se espera que la economía tenga una dinámica de una cadena de Markov. Sin embargo, esto no necesariamente es cierto en nuestra economía, ya que incorporamos dos tipos de firmas con restricciones de comercio que trataremos en la siguiente sección.

2.3. Restricciones de intercambio

Seguimos los resultados de De Paula and Scheinkman [2009], donde las firmas formales que quieren aprovechar el IVA débito y el IVA crédito, deciden solamente comprar sus insumos y vender sus productos a firmas formales. Dada esta forma de comportarse de las firmas formales, ninguna le comprará a las firmas informales, por lo que las firmas informales también intercambian bienes con agentes de su mismo tipo. Para ello, construimos una función C que nos indique las firmas (i, j) que pueden comerciar con sus vecinos. La función de comercio⁵ toma 1 en el caso que ambos vecinos de abajo tengan el mismo status impositivo. Por ejemplo, si la unidad productiva (i, j) es informal, sólo podrá producir y pedir los dos insumos necesarios a sus vecinos de la etapa de producción anterior (fila $i + 1$) si los mismos son informales, para cualquier otra combinación el individuo no puede comerciar con sus proveedores y por lo tanto no puede producir. De esta manera, nuestra restricción puede estar activa o no durante una reacción en cadena, dependiendo del ordenamiento final luego de las mudanzas.

Intuitivamente, la restricción sugiere que la probabilidad de ser atrapado cuando las firmas formales comercian con las informales es igual a uno. Por un lado, las firmas formales utilizan su saldo fiscal para deducirlo de sus cargas impositivas en los balances finales, por lo que no tienen incentivos a mostrar irregularidades en sus compras o ventas que no aprovechen dicho débito o crédito fiscal. Por otro lado, suponemos que el gobierno no tiene control en el sector informal, siendo dificultoso detectar el intercambio de dichas firmas que ni siquiera están registradas. En otros términos, la probabilidad de ser descubierto cuando firmas informales comercian es nula.

Teniendo en cuenta la ley de movimiento de inventario de la ecuación 1 y las posibilidades de intercambio de las firmas, en los casos en que la restricción esté activa ($C(i, j) = 0$) las firmas pueden vender la unidad que tenían en stock y continuar con cero unidades producidas. En el cuadro 2 se destacan los casos en los que no se cumple la ley de inventario, ya que no se produce porque las firmas están condicionadas a una ubicación en las que no pueden comerciar. En particular, cuando las firmas tienen una unidad pero le demandan dos unidades, la firma puede vender esa única que tiene, dejando a una firma sin satisfacer su pedido.

La introducción de la informalidad en una economía con la dinámica de avalanchas de Bak et al. [1993] genera efectos contrapuestos para la reacción en cadena de las firmas. Por un lado, a configuración de la ubicación de las firmas da lugar a que las fluctuaciones del producto sea menor que en el caso original sin ambos sectores ya que los mismos frenan la avalancha. Por otro lado, las restricciones de intercambio introducidas logra que todo el sistema tenga mayor cantidad de firmas en estado crítico. Como el cuadro 1 muestra, hay más posibilidades de que el estado final del inventario sea cero (columna $x'(x, s, c)$) que en el modelo original. Por ese motivo, se espera que las avalanchas tengan mayor probabilidad de ocurrencia y mayor profundidad.

⁵Ver en el apéndice 5.2 la función comercio.

x	s	c	$y(x, s, c)$	$x'(x, s, c)$
1	0	1	0	1
1	1	1	0	0
1	2	1	2	1
1	0	0	0	1
1	1	0	0	0
1	2	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	1	2	1
0	2	1	2	0
0	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	2	0	0	0

Cuadro 2: Ley de movimiento de inventario condicional a las restricciones

2.4. Comportamiento Global de la Economía

Para realizar un análisis la economía con sector formal e informal nuestro algoritmo final⁶ es:

1. Se genera una configuración de firmas siguiendo el algoritmo de Schelling original.
2. Se identifican las restricciones de comercio entre firmas.
3. Se generan shocks de demandas a bienes finales y se computan las fluctuaciones de la producción y demanda en la economía.
4. Se permite una nueva configuración de Schelling teniendo en cuenta las firmas que no pudieron producir y comerciar en la etapa anterior.

Al algoritmo de Schelling original lo modificamos en la etapa siguiente en la que la economía recibe shocks de demanda aleatorios⁷. En el paso 4, además de evaluar su grado de insatisfacción con respecto al vecindario tenemos en cuenta que no hayan tenido la oportunidad de producir e intercambiar bienes. Las nuevas mudanzas generan a su vez una nueva configuración de posibilidades de intercambio para futuros shocks en la economía.

La idea detrás de nuestra especificación es que las firmas igual tendrán incentivos a intercambiar posiciones cuando no tuvieron la posibilidad de comerciar por la configuración anterior.

3. Resultados del modelo

Como Bak et al. [1993] obtienen, la variable aleatoria $\tilde{N}_t = N_t/L^{1-\gamma}$ tiene una media que no depende del tamaño de la economía N . Por lo tanto, sencillez computacional y sin pérdida de generalidad se eligió una economía de veinte sectores por veinte etapas productivas, donde el umbral de tolerancia de vecinos de igual tipo es seis. Intuitivamente, elegimos un umbral alto de tolerancia dado que las firmas quieren ubicarse en una zona favorable para poder conseguir sus insumos y poder vender sus productos.

⁶Ver apéndice 5.5

⁷Ver apéndice 5.4.

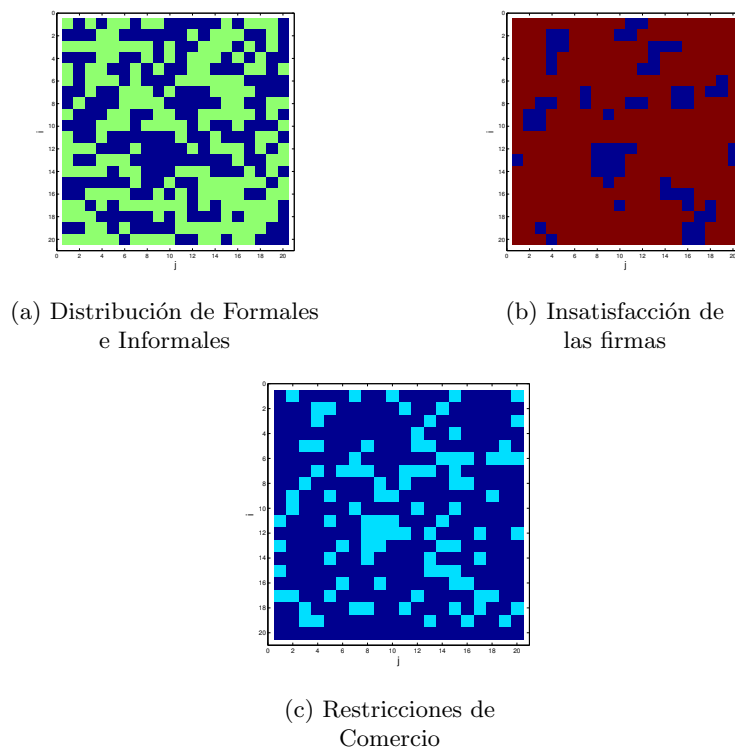


Figura 2: Situación Inicial: Período 1. Iteración 1.

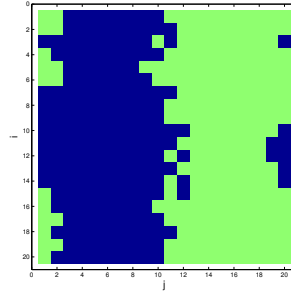
Para realizar un análisis global de la dinámica del modelo, suponemos un contexto donde luego de realizarse un considerable número de mudanzas⁸ la economía recibe 50000 shocks consecutivos de demanda por bienes finales. Realizamos dicha cantidad considerable de shocks de demanda para un mejor análisis de la distribución de probabilidad de las fluctuaciones de la economía.

La figura 2 muestra la configuración inicial del sistema, donde las empresas formales e informales son distribuidas aleatoriamente como en el panel 2a. Como es esperable la mayoría de las firmas no están contentas con su ubicación, motivo por el cual se observan numerosas celdas rojas en la figura 2b. Además, pocas unidades productivas cumplen con las restricciones de comercio entre firmas formales e informales (celdas de color celeste en el panel 2c).

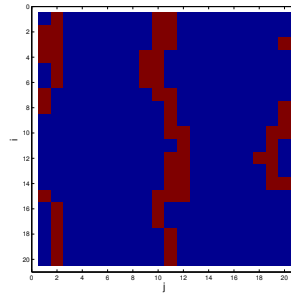
Luego de las iteraciones que dan lugar a la segregación, obtuvimos para la primer etapa la configuración de la figura 3. En el panel 3a se forman barrios de informalidad (zona azul) y barrios de firmas formales (zona verde) con un umbral alto de tolerancia. En el caso de las firmas que se encuentran en el borde de dichas zonas, las mismas se encuentran descontentas como muestra el panel 3b y gran parte de dichas firmas no puede producir si no tiene stock y recibe una demanda dado que sus proveedores son firmas de distinto tipo (firmas de color azul en el panel 3c).

Una vez lograda la ubicación de las firmas, introducimos los shocks consecutivos de demanda en la etapa de bienes finales (fila 1 de nuestra matriz), la cual condicional al stock de producción

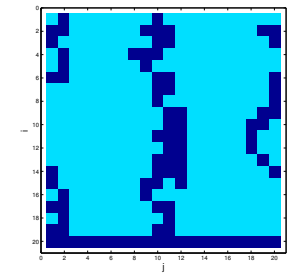
⁸En el ejercicio realizamos 100000 selecciones de pares de individuos que evaluamos con el algoritmo, ya que con 1.000.000 de mudanzas el sistema no se agotó.



(a) Distribución de Formales e Informales



(b) Insatisfacción de las firmas



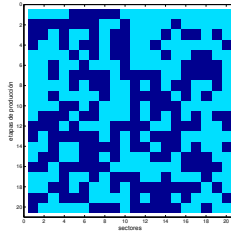
(c) Restricciones de Comercio

Figura 3: Situación 1: Período 1. Iteración 100000.

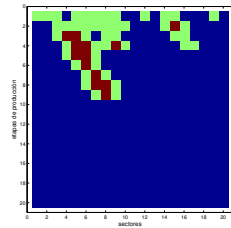
de las firmas (el cual se asignó de manera aleatoria⁹) demandará o no insumos a las firmas de la etapa anterior. En la figura 4a se observa el estado de los inventarios de las firmas antes de los shocks de demanda. Aproximadamente, el 56 % de las firmas tiene una unidad producida. Luego, los shocks en distintos sectores de la economía en el primer período se observan una primera reacción en cadena de demandas a la etapa productiva anterior como en el panel 4b, donde algunas firmas tienen demandas unitarias (color verde) y otras tienen pedidos de las dos firmas a las que les puede vender (color rojo). Según el stock que tenga cada una, la restricción de intercambio y las demandas, las firmas producen como en el panel 4c. Una vez finalizados los 50000 períodos, se obtiene el estado final de inventario como en la figura 4d, donde el 42 % de las firmas quedó con una unidad del bien en su stock, lo cual refleja mayor cantidad de firmas en estado crítico al introducir restricción en el intercambio local de las firmas (más unidades productivas quedan con cero stock).

Al permitir una nueva configuración de Schelling teniendo en cuenta las firmas que no pudieron producir y comerciar, se obtiene la situación final 5. En particular, vemos que la nueva distribución de firmas no difiere significativamente de la situación antes de Bak & Chein. Intuitivamente, las firmas que estaban insatisfechas y no produjeron son las que se mudan, alterando levemente la configuración anterior y la matriz de restricciones de comercio.

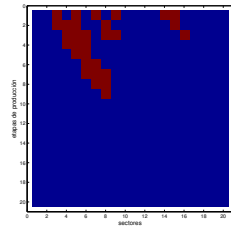
⁹Ver apéndice 5.3



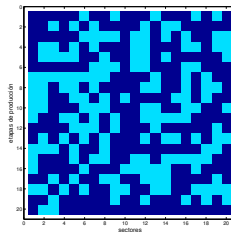
(a) Estado de inventario inicial



(b) Demandas en $t = 1$

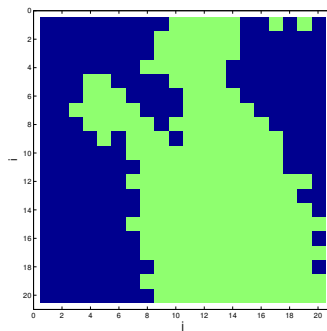


(c) Producción en $t = 1$

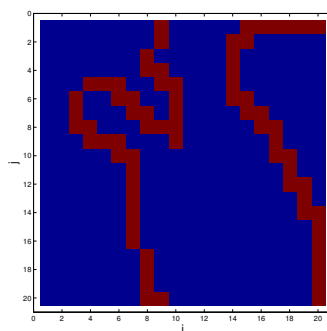


(d) Estado de inventario final

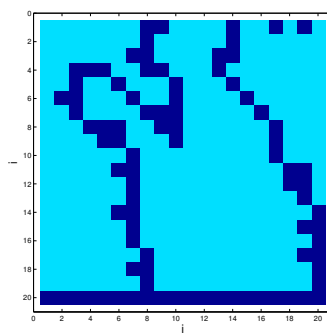
Figura 4: Dinámica de avalanchas



(a) Distribución de Formales e Informales



(b) Insatisfacción de las firmas



(c) Restricciones de Comercio

Figura 5: Situación Final: Período 50000. Iteración 100000.

	Media	Desvío estándar	Mediana	Mín.	Máy.
Produccion Total	60.08	46.72	50	0	346
Produccion Formal	35.88	36.11	26	0	230
Produccion Informal	24.20	29.78	10	0	222
Demanda Agregada	9.99	2.24	10	1	19
Demanda Formal	6	1.74	6	0	12
Demanda Informal	3.99	1.41	4	0	8

Cuadro 3: Estadística Descriptiva

3.1. Fluctuaciones agregadas y distribución de probabilidad

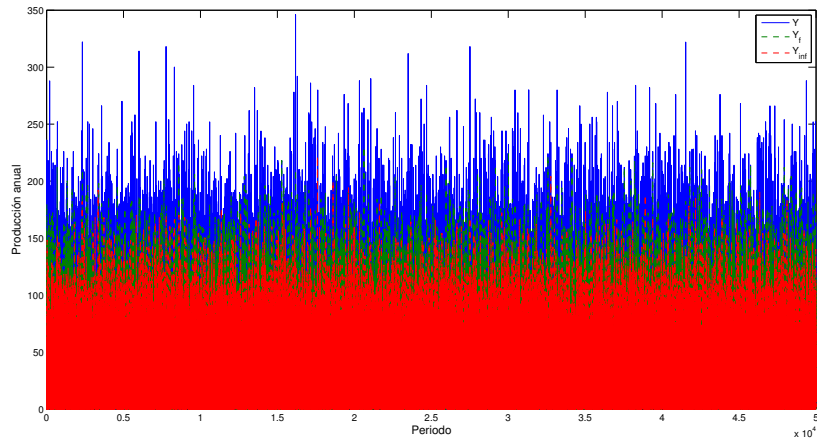
Para obtener el producto total anual y la demanda agregada anual, sumamos la producción y demandas de bienes finales de los shocks consecutivos respectivamente. Del mismo modo, al condicionar para los dos tipos de firma, obtuvimos la producción y demanda de cada sector para cada periodo. La figura 6a nos muestran los movimientos conjuntos del producto de la economía (azul), producción total en el sector formal (verde) y producción de unidades en el sector informal (rojo) durante un período de veinte años. En particular, la figura 6a, sugiere que el producto de la economía es estacionario, no muestra tendencias ni cambios significativos de la varianza; al igual que la producción en cada sector. Esto sugiere que, a pesar de introducir restricciones de intercambio entre distintos tipos de firmas, el espacio X tiene la dinámica de una cadena de Markov como en Bak et al. [1993].

La tabla 3 presenta un resumen de las variables de interés. La producción agregada tiene una media de 60 pero con gran variabilidad como lo muestra la figura 6a. Lo mismo ocurre con el sector formal e informal, con una media de 36 y 24 unidades en promedio respectivamente. En cambio, las demandas agregadas de la economía y cada sector del panel 6b, mantienen una variación más cercana al promedio que informa el cuadro de estadística descriptiva. Esto se debe a que el vector de demandas sectoriales, independientes entre sector y en cada periodo, es estacionario por construcción. Mientras que el producto, lo cual a su vez se interpreta como el tamaño de la avalancha en la economía, depende del estado de inventario de las firmas, los shocks de demandas independientes y las restricciones de comercio.

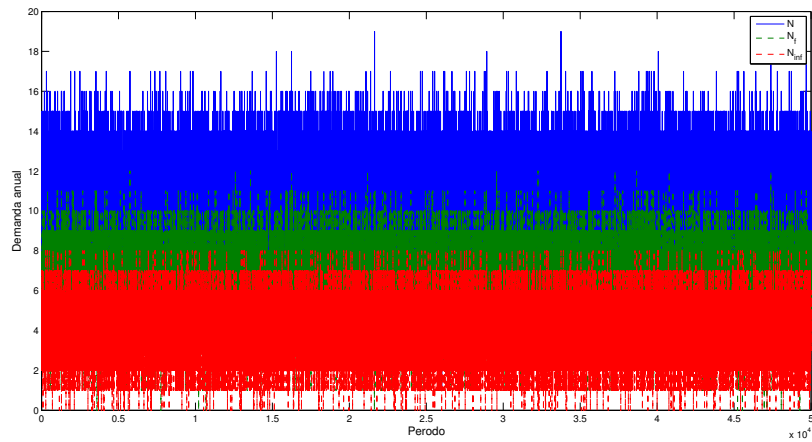
Al igual que en Bak et al. [1993], el tamaño de la avalancha causado por una demanda en un sector j en el periodo t es idéntico en los N sectores. Además, los valores que muestra el producto en el panel 6a presentan variaciones entre cada realización muy grande. Por ello, las figuras 7 nos ayudan a entender si la distribución del tamaño de avalanchas proveniente de j sectores sigue una ley de potencia. Por un lado, al comparar la distribución de la producción agregada con la exponencial teórica en el panel 7a, vemos que tienen un comportamiento similar con distinta magnitud. Por otro lado, cuando se compara la distribución de probabilidad del tamaño de avalancha con leyes de potencia teóricas de distintos exponentes en escala loglog, la misma parece ser compatible con un exponente -1.

Bak et al. [1993] encuentran que la probabilidad de la avalancha producida por una orden en el sector j llegue a la fila R_j , es $r^{-3/2}$. En nuestro caso, para una economía finita de 20 sectores y etapas productivas, con restricciones al comercio entre distintas firmas, es cercano a -1. Ello puede deberse a que nuestra economía tiene mayor cantidad de unidades en estado crítico y por lo tanto mayor inestabilidad. Para esta economía, la avalancha para si y sólo si se vende con el inventario existente o la firma marginal tiene la restricción de intercambio activa.

Las figuras 8a y 8b muestran la distribución obtenida en el sector formal e informal en escala loglog. En particular, la relación del producto informal es menos clara que la producción agregada, cuya distribución parece ser compatible con un exponente de -1.2.

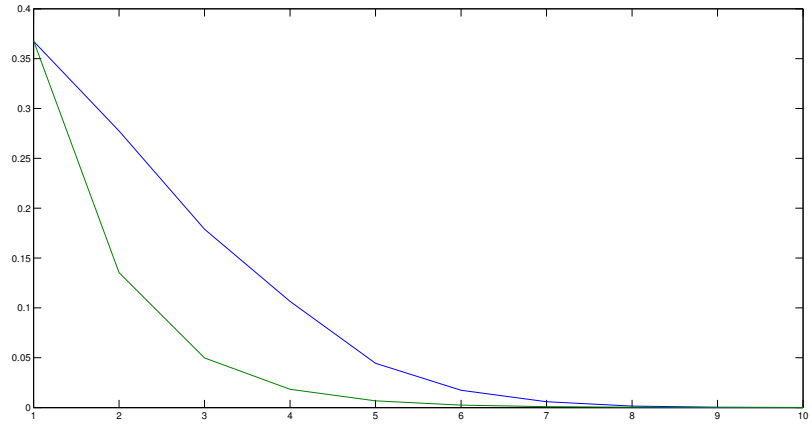


(a) Producción total

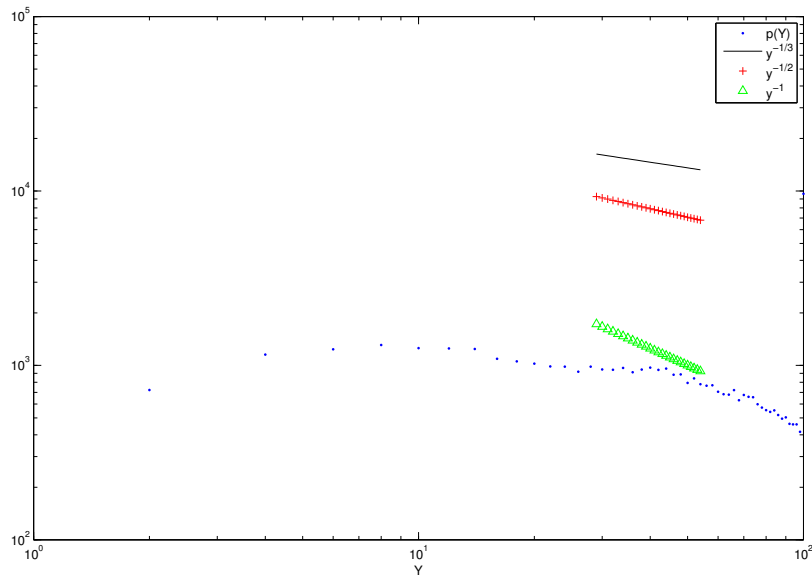


(b) Demanda agregada

Figura 6: Fluctuaciones anuales. Período 20. Iteración 100000.

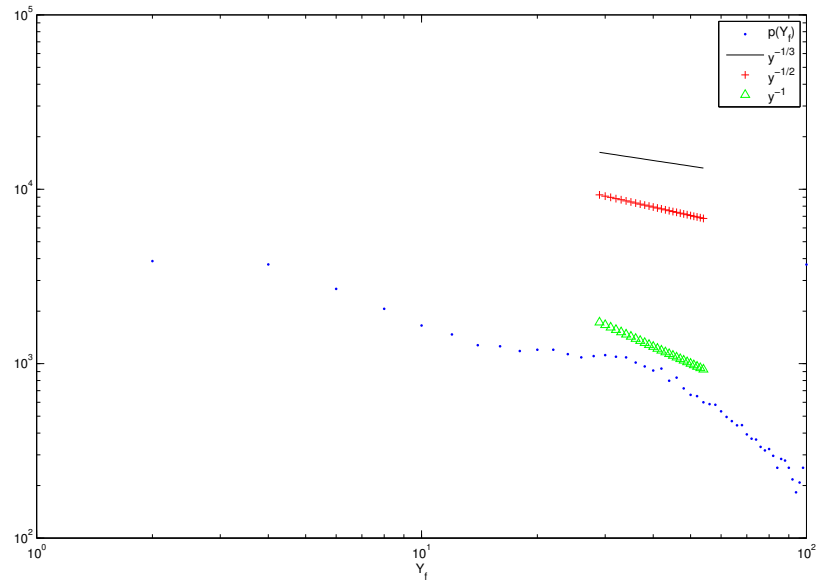


(a) Relación con una exponencial teórica

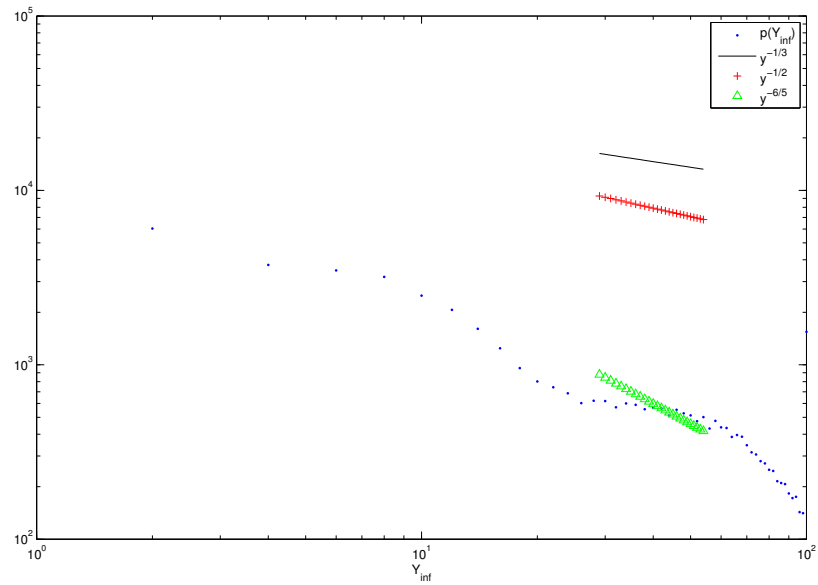


(b) Ley de potencia

Figura 7: Distribución del tamaño de avalanchas



(a) Ley de potencia en el sector formal



(b) Ley de potencia en el sector informal

Figura 8: Distribución del tamaño de avalanchas

4. Conclusiones finales y posibles extensiones

Se planteo una economía con múltiples sectores y niveles productivos, donde las firmas pueden estar registradas o no. La ubicación de las firmas en la economía, su tecnología no convexa y la interacción local, son claves para que pequeños shocks de demanda de bienes finales de lugar a fluctuaciones en el producto agregado de la economía. Para ello, se utilizaron los algoritmos del Modelo de Schelling [1971] y Bak et al. [1993] con restricciones relacionadas a la literatura de informalidad. En particular, se analizó las diferencias en la distribución del tamaño de avalancha con heterogeneidad de firmas.

Bajo preferencias por el vecindario de las firmas, se logra la segregación de los dos tipos de firmas en la economía formándose barrios de informalidad. La introducción de restricciones de intercambio entre las firma de distinto tipo, dio lugar a una economía más inestable con más unidades productivas en estado crítico. Además, la distribución del tamaño de las avalanchas parece obedecer una ley de potencia de exponente -1 , aunque su relación es menos clara para el sector formal e informal.

Una de las limitaciones principales del modelo es que la proporción de informalidad a formalidad se mantiene constante. En el modelo, el porcentaje de unidades productivas informales respecto del total de firmas es del 48 % aproximadamente. Una extensión del modelo podría involucrar una matriz que tenga en cuenta la productividad de cada firma al estilo De Paula and Scheinkman [2009], de modo que endógenamente las firmas tomen la decisión de ser formales e informales según su nivel de productividad antes de mudarse. Con ello se lograría que varíe el status de cada firma, cambiando la proporción de formales a informales. Por un lado, podría interpretarse y extender el modelo para dos economías: las emergentes con mayor productividad promedio en las últimas etapas productivas, y las desarrolladas con mayor productividad en bienes intermedios y finales. Por el otro, con distintas distribuciones de productividad entre las firmas formales e informales podría obtenerse como resultado que las firmas formales son menos productivas en promedio con bienes de menor calidad La Porta and Shleifer [2014].

La informalidad como un concepto dicotómico, en el que las firmas registradas son formales y las no registradas son informales, de modo que la producción agregada es la simple suma de la producción de los dos sectores. Dicho enfoque, no contempla que firmas sean parcialmente informales, o la informalidad extensiva (si la firma está registrada o no) e intensiva (si los trabajadores están en blanco) Ulyssea et al. [2014]. Sin embargo, relajar la definición de las firmas informales daría lugar a un modelo más complejo con interpretaciones menos intuitivas de las que obtuvimos.

Referencias

- Per Bak, Kan Chen, José Scheinkman, and Michael Woodford. Aggregate fluctuations from independent sectoral shocks: self-organized criticality in a model of production and inventory dynamics. *Ricerche Economiche*, 47(1):3–30, 1993.
- Aureo De Paula and Jose A Scheinkman. Value added taxes, chain effects and informality. 2009.
- Rafael La Porta and Andrei Shleifer. Informality and development. *The Journal of Economic Perspectives*, 28(3):109–126, 2014.
- Norman V Loayza. The economics of the informal sector: a simple model and some empirical evidence from latin america. In *Carnegie-Rochester conference series on public policy*, volume 45, pages 129–162. Elsevier, 1996.

Thomas C Schelling. Dynamic models of segregation†. *Journal of mathematical sociology*, 1(2): 143–186, 1971.

Friedrich Schneider and Dominik Enste. Shadow economies around the world size, causes, and consequences. 2000.

Gabriel Ulyssea et al. Firms, informality and development: Theory and evidence from brazil. *American Economic Review*, 2014.

5. Apéndice

5.1. Schelling original

```
1  %% Schelling game - Adaptacin a una Economa Informal
2  %%
3
4  function [U , Eco-Informal] = schelling(N, thresh)
5
6      step      = 150;
7      rand('state',0);
8
9
10     U = round(rand(N,N));           % sets random field
11
12     figure(1)
13     film = imagesc(U,[0 2]);        % sets main figure
14     axis off; axis square; axis on;
15     xlabel('j','fontsize',16);
16     ylabel('i','fontsize',16);
17     axis([0 N+1 0 N+1]);
18
19     i=1;
20     while i <= 100000,
21
22         i
23
24         % Selects one agent
25         one = round(rand(1,2)*(N-1))+1;
26         x1 = one(1); y1 = one(2);
27
28         % selects second agent
29         two = round(rand(1,2)*(N-1))+1;
30         x2 = two(1); y2 = two(2);
31
32         % if different color, computes satisfaction
33         if U(x1,y1) ~= U(x2,y2)
34             sat1 = measures_satisfaction(x1,y1,U,N);
35             sat2 = measures_satisfaction(x2,y2,U,N);
36
37             if sat1 < thresh & sat2 < thresh
38                 temp      = U(x1,y1);
39                 U(x1,y1) = U(x2,y2);
40                 U(x2,y2) = temp;
41             end;
42         end;
43
44         if (mod(i,step)==0)
```

```

45         set(film,'cdata',U);
46         drawnow
47     end
48
49     i=i+1;
50
51 end
52
53 %Grficamos los insatisfechos
54 figure(2)
55 S = color_unsatisfied(U, N, thresh);
56 film = imagesc(S,[0 2]);
57 set(film,'cdata',S); % sets main figure
58 axis off; axis square; axis on;
59 xlabel('j','fontsize',16);
60 ylabel('i','fontsize',16);
61 axis([0 N+1 0 N+1]);
62 drawnow
63
64 %Medimos el tamaño de la economía informal
65 I=sum(sum(U==0));
66 F=sum(sum(U==1));
67
68 Eco.Informal=I/(F+I);
69
70 end
71
72
73 function sat = measures_satisfaction(x1,y1, U, N)
74
75     xL = mod(x1-2,N)+1; % index left
76     xR = mod(x1,N)+1;   % index right
77     yB = mod(y1-2,N)+1; % index bottom
78     yT = mod(y1,N)+1;   % index top
79
80     % measures the number of 1s in neighborhood
81     neig = U(xL,y1) + U(xR,y1) + U(x1,yB) + U(x1,yT);
82     neig = neig + U(xL,yB) + U(xL,yT) + U(xR, yB) + U(xR, yT);
83
84     % defines satisfaction
85     if U(x1,y1) == 0
86         sat = 8 - neig;
87     else
88         sat = neig;
89     end;
90
91 end
92
93 function S = color_unsatisfied(U, N, thresh)
94     S = zeros(N,N);
95     for x = 1:N,
96         for y = 1:N,
97             sat = measures_satisfaction(x,y,U,N)
98             if sat < thresh,
99                 S(x,y) = 2;
100         end
101     end
102 end
103 end

```

5.2. Restricciones de Comercio

```
1 %% Funcion de identificacion de firmas formales e informales que pueden
2 % comerciar.
3 %%
4
5 function [C]=comercio(U)
6
7 I2=length(U); %filas de la matriz U y C informales/formales
8 J2=length(U); %columnas de la matriz U y C informales/formales
9
10 sz=size(U);
11
12 C=zeros(sz);
13
14 %Cuando la restriccion los deje comerciar entonces C(i2,j2)=1
15
16 for i2=1:I2;
17     for j2=1:J2;
18         if i2<I2
19             if U(i2,j2)==0; %Comercio de informales
20                 if U(i2+1, j2)==0 %abajo informal
21                     if j2+1>J2
22                         if U(i2+1, 1)==0 %abajo a la derecha informal
23
24                             C(i2, j2)=1; %comercia cuando son informales
25                         end
26                     else
27                         if U(i2+1, j2+1)==0
28
29                             C(i2, j2)=1; %comercia cuando son informales
30                         end
31                     else
32                         C(i2, j2)=0; %no comercia si abajo-derecha es formal
33                     end
34                 end
35             else
36                 C(i2, j2)=0; %no comercia si abajo es formal
37             end
38         else %Comercio Formales
39             if U(i2+1, j2)==1 %abajo formal
40                 if j2+1>J2
41
42                     if U(i2+1, 1)==1 %abajo a la derecha formal
43                         C(i2, j2)=1; %Comercian con los formales
44                     end
45                 else
46                     if U(i2+1, j2+1)==1
47                         C(i2, j2)=1; %comercian con los formales
48                     else
49                         C(i2, j2)=0; %los formales no le venden a los informales
50                     end
51                 end
52             end
53         else
54             C(i2, j2)=0; %los formales no le venden a los informales
55         end
56     end
57 end
58
```

```

59     end
60   end
61 end
62 end

```

5.3. Bak & Chein en una economía de dos sectores

```

1  %% BAK & CHEIN - Avalancha utilizando la configuracion de barrios
2  % informales
3  %%
4  function [ U, C, Y.fh, Y.linfh, Y.h, N.h, N.fh, N.linfh, E] = bk(U ,T ,C)
5
6  I=length(U); %filas de la matriz
7  J=length(U); %columnas de la matriz
8
9  %Distribucion aleatoria del inventario de las unidades productivas
10 x=round(rand(I,J));
11
12
13 for t=1:T
14   %Genero los tamao de las matrices del shock aleatorio y avalancha
15   sz = size(U);
16
17   s=zeros(sz);
18   y=zeros(sz);
19
20   %Genero la matriz E qu indica si nunca produjeron
21   E=zeros(sz);
22
23   %Shock aleatorio en la ultima etapa de produccion (asociamos la ultima
24   %etapa con la 1er fila)
25   s(1,:)=round(rand(1,J));
26
27
28   t
29   for i=1:I,
30
31     for j=1:J,
32
33       %Si tengo una demanda pero tengo stock cero y la restriccin
34       %de comercio me deja entonces produzco 2 unidades
35       if s(i,j) > x(i,j) & C(i,j)==1;
36         y(i,j)=2;
37
38       %Grafico de la avalancha
39       step = 150;
40
41       % figure(4)
42       % film = imagesc(y,[0 2]);
43       % axis off; axis square; axis on;
44       % xlabel('sectores','fontsize',12);
45       % ylabel('etapas de produccion','fontsize',12);
46       % axis([0 J+1 0 I+1]);
47       % drawnow
48
49       %grafico de las demandas
50       %figure(5)
51       %film = imagesc(s,[0 2]);
52       %axis off; axis square; axis on;

```

```

53     xlabel('sectores','fontsize',12);
54     ylabel('etapas de produccion','fontsize',12);
55     %axis([0 J+1 0 I+1]);
56     %set(film,'cdata',s);
57     %drawnow
58
59     %grafico del inventario
60     % figure(6)
61     % film = imagesc(x,[0 3]);
62     % axis off; axis square; axis on;
63     % xlabel('sectores','fontsize',12);
64     % ylabel('etapas de produccion','fontsize',12);
65     % axis([0 J+1 0 I+1]);
66     % set(film,'cdata',x);
67     % drawnow
68         end
69     end
70
71     %Estado del inventario condicional a las restricciones de comercio
72     if C(i,:)==1
73         x(i,:)=x(i,:)+y(i,:)-s(i,:);
74     else %siguen teniendo 1 o 0 si no podan comerciar
75         if x(i,:)<s(i,:)
76             x(i,:)=0;
77         else
78             x(i,:)=x(i,:)+y(i,:)-s(i,:);
79         end
80     end
81
82     %Genero la avalancha abajo y a la derecha, es decir demanda para poder
83     %producir 2 unidades a los de la etapa anterior y otro sector:
84
85     if i<I,
86         for j=1:J,
87             if y(i,j)==2;
88                 %abajo
89                 if C(i,j)==1 %Condicionamos la restriccion de comercio
90                     s(i+1,j)=s(i+1,j)+1;
91                 if j+1>J
92                     %a la derecha de la ultima columna pasa a la primer
93                     %columna de abajo
94
95                     s(i+1,1)=s(i+1,1)+1;
96                 else %derecha-abajo
97                     s(i+1,j+1)=s(i+1,j+1)+1;
98                 end
99
100                 %if (mod(i,step)==0)
101                 % set(film,'bkdata',y);
102                 % drawnow
103                 %end
104
105                 end
106             end
107
108             %Registramos cuando las fimas no produjeron
109             if y(i,j)==2
110                 E(i,j)=1;
111             else
112                 E(i,j)=0;
113             end
114

```

```

115     end
116 end
117
118 end
119 %estimamos la produccion total
120 Y=sum(sum(y));
121
122 %Estimamos la produccion del sector formal e informal
123
124 Y_f=sum(sum(y(U==1)));
125 Y_inf= sum(sum(y(U==0)));
126
127 %Estimamos la Demanda Agregada
128 N_d=sum(s(1,:));
129 %denotamos N_d de demanda para que se distinga de nuestro tamao
130 %de la economa NxN
131
132 %Estimamos la demanda en cada sector
133 s_1 = s(1,:); %vector auxiliar de la primer fila de ventas
134 u_1 = U(1,:); %vector de status auxiliar de la primer fila
135
136 N_f=sum(s_1(u_1==1));
137 N_inf=sum(s_1(u_1==0));
138
139 %% Registramos las fluctuaciones:
140 if t==1
141     %Producto Total Inicial
142     Y_h= ones(1,50000);
143     Y_h(1,1)=Y;
144
145     Y_fh=ones(1,50000);
146     Y_fh(1,1)=Y_f;
147
148     Y_infh=ones(1,50000);
149     Y_infh(1,1)=Y_inf;
150
151     %Demanda agregada de bienes finales inicial
152     N_h= ones(1,50000);
153     N_h(1,1)=N_d;
154
155     N_fh=ones(1,50000);
156     N_fh(1,1)=N_f;
157
158     N_infh=ones(1,50000);
159     N_infh(1,1)=N_inf;
160
161 else
162     %Producto Total Mensual
163     Y_h(1,t)=Y;
164     Y_fh(1,t)=Y_f;
165     Y_infh(1,t)=Y_inf;
166
167     %DA de bienes Finales Mensuales
168     N_h(1,t)=N_d;
169     N_fh(1,t)=N_f;
170     N_infh(1,t)=N_inf;
171
172 end
173
174 if t==50000
175     %grafico del inventario
176     figure(6)

```

```

177     film = imagesc(x,[0 3]);
178     axis off; axis square; axis on;
179     xlabel('sectores','fontsize',12);
180     ylabel('etapas de produccion','fontsize',12);
181     axis([0 J+1 0 I+1]);
182     set(film,'cdata',x);
183     drawnow
184     end
185
186
187 end
188
189 end

```

5.4. Extensión de Schelling

```

1  %% Extension de Schelling de firmas formales e informales, teniendo
2  %% en cuenta las avalanchas y restricciones comerciales.
3  %%
4
5  function [U, C, E] = schelling2(U, N, C, thresh, E)
6
7      step = 150;
8      rand('state',0);
9
10     figure(1)
11     film = imagesc(U,[0 2]);
12     axis off; axis square; axis on;
13     xlabel('j','fontsize',16);
14     ylabel('i','fontsize',16);
15     axis([0 N+1 0 N+1]);
16
17     i=1;
18     while i <= 100000,
19
20         i
21
22         % Selecciono agente 1
23         one = round(rand(1,2)*(N-1))+1;
24         x1 = one(1); y1 = one(2);
25
26         % Selecciono agente 2
27         two = round(rand(1,2)*(N-1))+1;
28         x2 = two(1); y2 = two(2);
29
30         % Si son distintos, nos fijamos si ambos pudieron comerciar
31         % y estn insatisfechos:
32         if U(x1,y1) ~= U(x2,y2)
33             sat1 = measures.satisfaction(x1,y1,U,N);
34             sat2 = measures.satisfaction(x2,y2,U,N);
35
36             %Cuando ninguno pudo comerciar, no produjo y esta insatisfecho
37             %con la mayora de su barrio, intercambian lugar
38             if (C(x1,y1)==0 && C(x2,y2)==0 && E(x1,y1)==0 &&...
39                 E(x2,y2)==0 && sat1 < thresh && sat2 < thresh)
40
41                 temp = U(x1,y1);
42                 U(x1,y1) = U(x2,y2);
43                 U(x2,y2) = temp;

```

```

44         end;
45     end;
46
47     %Vuelvo a identificar los que pueden comerciar luego del
48     %intercambio de lugar
49
50     C=comercio(U);
51
52
53     if (mod(i,step)==0)
54         set(film,'cdata',U);
55         drawnow
56     end
57
58     i=i+1;
59
60 end
61
62 %Grficamos los insatisfechos
63 figure(2)
64 S = color_unsatisfied(U, N, thresh);
65 film = imagesc(S,[0 2]);
66 axis off; axis square; axis on;
67 xlabel('i','fontsize',16);
68 ylabel('j','fontsize',16);
69 axis([0 N+1 0 N+1]);
70 set(film,'cdata',S);
71 drawnow
72
73 %Graficamos la Matriz de Restricciones comerciales
74 figure(3)
75 film = imagesc(C,[0 3]);
76 axis off; axis square; axis on;
77 xlabel('j','fontsize',16);
78 ylabel('i','fontsize',16);
79 axis([0 N+1 0 N+1]);
80 set(film,'cdata',C);
81 drawnow
82
83 end
84
85 function sat = measures_satisfaction(x1,y1, U, N)
86
87     xL = mod(x1-2,N)+1; % index left
88     xR = mod(x1,N)+1; % index right
89     yB = mod(y1-2,N)+1; % index bottom
90     yT = mod(y1,N)+1; % index top
91
92     % measures the number of 1s in neighborhood
93     neig = U(xL,y1) + U(xR,y1) + U(x1,yB) + U(x1,yT);
94     neig = neig + U(xL,yB) + U(xL,yT) + U(xR, yB) + U(xR, yT);
95
96     % defines satisfaction
97     if U(x1,y1) == 0
98         sat = 8 - neig;
99     else
100         sat = neig;
101     end;
102
103 end
104
105

```



```

106 function S = color_unsatisfied(U, N, thresh)
107     S = zeros(N,N);
108     for x = 1:N,
109         for y = 1:N,
110             sat = measures_satisfaction(x,y,U,N);
111             if sat < thresh,
112                 S(x,y) = 2;
113             end
114         end
115     end
116 end

```

5.5. Función General con la dinámica de informalidad y fluctuaciones

```

1  %%      FUNCION GENERAL  %%
2  %%      Romero & Martinez  %
3  %%
4
5  % C:\Users\Noelia\Dropbox\Acotada\Codigo
6  % Correr informal_bk(20,6,50000)
7  function [Y_a , Y_fa, Y_infa ]=informal_bk(N, tresh, T)
8
9  %Segregacion en el mercado formal e informal
10 [U , Eco_Informal]= schelling(N, tresh);
11
12 %Corro la restricciones de comercio entre formales e informales
13 [C]=comercio(U);
14
15 figure(3)
16 film = imagesc(C,[0 3]);
17 axis off; axis square; axis on;
18 xlabel('j','fontsize',16);
19 ylabel('i','fontsize',16);
20 axis([0 N+1 0 N+1]);
21 set(film,'cdata',C);
22 drawnow
23
24 %Corre la avalancha teniendo en cuenta dicha restricciones
25 [ U, C, Y_fh, Y_infh, Y_h, N_h, N_fh, N_infh, E] = bk(U ,T ,C);
26
27 %"Schelling" donde intercambian posiciones quienes no pudieron comerciar.
28 %Dinamica de segregacion y fluctuaciones economicas
29 [U, C, E]=schelling2(U, N, C, tresh, E);
30
31 figure(3)
32 film = imagesc(C,[0 3]);
33 axis off; axis square; axis on;
34 xlabel('j','fontsize',16);
35 ylabel('i','fontsize',16);
36 axis([0 N+1 0 N+1]);
37 set(film,'cdata',C);
38 drawnow
39
40 %% Grafico de las fluctuaciones de la produccion total, formal e informal;
41 %% la demanda agregada, informal y formal:
42 t=1:50000;
43
44 figure(7)
45 plot(t, Y_h, '-',t, Y_fh, '--',t, Y_infh, '-r')

```

```

46 xlabel('Periodo','fontsize',12);
47 ylabel('Produccion anual','fontsize',12);
48 hleg1 = legend('Y','Y_f','Y_{inf}');
49 %axis([0 101 -2 300]);
50
51 figure(8)
52 plot(t,N_h,'-',t,N_fh,'--',t,N_infh,'--r')
53 xlabel('Perodo','fontsize',12);
54 ylabel('Demanda anual','fontsize',12);
55 hleg1 = legend('N','N_f','N_{inf}');
56 %axis([0 101 -1 20]);
57
58 %Histogramas
59 figure(9)
60 hist(Y_h)
61
62 figure(10)
63 hist(N_h)
64
65 figure(11) %Comparacin de la produccion con una exponencial terica
66 hx=1:10;
67 nn=hist(Y_h);
68 nn=nn/sum(nn);
69 plot(hx,nn,hx,exp(-hx));
70
71 figure(12) %Power Law
72 hx=0:100;
73 h=hist(Y_h,hx);
74 loglog(hx,h, '.')
75
76 hold on
77 hx1=hx(30:55);
78 loglog(hx1,T*hx1.^(-1/3),'k-',hx1,T*hx1.^(-1/2), 'r+', hx1,T*hx1.^(-3),'g^')
79 legend('p(Y)','y^{-1/3}','y^{-1/2}','y^{-3}')
80 xlabel('Y')
81 hold off
82
83 figure(13) %Power Law Formal
84 hx=0:100;
85 h=hist(Y_fh,hx);
86 loglog(hx,h, '.')
87
88 hold on
89 hx1=hx(30:55);
90 loglog(hx1,T*hx1.^(-1/3),'k-',hx1,T*hx1.^(-1/2), 'r+', hx1,T*hx1.^(-1),'g^')
91 legend('p(Y_f)','y^{-1/3}','y^{-1/2}','y^{-1}')
92 xlabel('Y_f')
93 hold off
94
95 figure(14) %Power Law Informal
96 hx=0:100;
97 h=hist(Y_infh,hx);
98 loglog(hx,h, '.')
99
100 hold on
101 hx1=hx(30:55);
102 loglog(hx1,T*hx1.^(-1/3),'k-',hx1,T*hx1.^(-1/2), 'r+', hx1,T*hx1.^(-1.2),'g^')
103 legend('p(Y_{inf})','y^{-1/3}','y^{-1/2}','y^{-6/5}')
104 xlabel('Y_{inf}')
105 hold off
106
107

```

```

108 %Estadstica descriptiva de los resultados
109 %Annual
110 X = [Y.h', Y.fh', Y.infh',N.h', N.fh', N.infh'];
111
112 s1= mean(X);
113 s2= std(X);
114 s3= median(X);
115 s4= min(X);
116 s5= max(X);
117
118 SS= [ s1', s2' , s3',s4', s5'];
119
120 input.data=SS %exportamos a latex
121 input.tableColLabels = {'media','desvio estandar','mediana',...
122 'minimo','maximo'}; %column labels
123 input.tableRowLabels = {'Produccion Total','Produccion Formal',...
124 'Produccion Informal','Demanda Agregada', 'Demanda Formal',...
125 'Demanda Informal'}; %row labels
126 input.tableCaption = 'Estadistica Descriptiva';
127 input.tableLabel = 'est_des'; % LaTeX table label
128 input.tableColumnAlignment = 'c';
129
130 % call latexTable:
131 latex = latexTable(input)
132
133 end

```