Universidad de San Andrés

Departamento de Economía
Racionalidad Acotada

"De Kioscos y Estrategias"

Alumnos: Diego Infante Morales

Milagros Mosteirin

Virginia Poggio Monteverde

María Micaela Sviatschi

Primavera 2008

Uno de los objetivos de la investigación macroeconómica es generar modelos que capturen el proceso de toma de decisiones de los agentes en el mercado. Con un modelo perfecto se podría, por ejemplo, conocer con precisión los efectos de las políticas de gobierno sobre el bienestar de la sociedad. Sin embargo, el comportamiento humano es extremadamente complejo y difícil de predecir, y la ciencia está todavía lejos de poder describir en detalle los mecanismos que lo determinan (si es que existen). Una buena forma de evitar la caída en una posición nihilista es recurrir a la modelación del comportamiento bajo supuestos que permitan simplificarlo. Como menciona Navarro (2008), Descartes divide al comportamiento humano en simple, dado por las respuestas a los impulsos del medio ambiente donde no existe el libre albedrío; y complejo, determinado por el "alma" y sujeto al libre albedrío. Asimismo, Searle (2004) propone una hipótesis que considera a las neuronas como regidas por un mecanismo determinístico, cual hardware de un robot. Este trabajo se basa en la presunción que al menos una parte (simple) del comportamiento humano es perfectamente previsible. De esta manera, podemos caracterizar al *homo sapiens oeconomicus* mencionado por Dopfler (2005), un agente que actúa según reglas sencillas pero en un plano económico.

En particular, estudiaremos el proceso decisorio de los *vendedores* de un producto, siguiendo de cerca al trabajo de Heymann, Perazzo y Zimmermann (2008). Se modela a través de programación por agentes para responder a la pregunta: ¿qué estrategias son las óptimas para la maximización del beneficio?. En el modelo sencillo propuesto sólo se les permite a los vendedores ajustar su regla de fijación de precios en dos dimensiones: cuánto subirlo y cuánto bajarlo. En un primer acercamiento al problema, se supone que las estrategias de los agentes son estáticas y se estudia qué estrategias resultan óptimas. En una etapa posterior, se les permite a los agentes *aprender* del pasado; incorporar información en la toma de decisiones. Matoo Kimura, en su trabajo *The natural theory of molecular evolution* de 1983, trata de describir el mecanismo probabilístico que subyace al proceso de evolución con modelos matemáticos. Este trabajo, en sintonía, propone una conducta de aprendizaje sencilla que puede leerse como la forma más simple de evolución de la conducta de un agente.

Este modelo agrega a la literatura anterior (neoclásica) una propuesta *de cómo se llega* al precio de equilibrio. Con una regla simple se puede llegar a un resultado agregado complejo. Por otro lado, capta un aspecto importante de la realidad: la complejidad (heterogeneidad) dentro del mismo estado estacionario.

En la sección I se presenta formalmente el modelo. Se analizan estrategias aleatorias y se da la intuición del por qué de algunos resultados, en relación a la aversión al riesgo de los participantes. Se caracterizan asimismo las estrategias "ganadoras". Se muestra que no existe tal cosa como una estrategia "ganadora", sino que el comportamiento óptimo de cada vendedor depende del pool de competidores y su comportamiento.

En la sección II se busca encontrar la estrategia óptima (la que genera los mayores beneficios) para distintos rangos posibles de α y β; esto permite analizar las estrategias de los demás jugadores para captar el efecto de las estrategias de los demás jugadores. Esto se expone gráficamente, en una "malla".

En la sección III se repite el experimento de la sección I agregando un parámetro adaptativo. Es decir, se flexibilizan las estrategias al poder "amortiguar" los saltos en los precios que se producen al subir o bajarlos. Se encuentra que a mayor amortiguación, menor es el beneficio. Asimismo se compara dentro de un mismo juego el comportamiento de una población amortiguada con el de otra que no amortigua, manteniendo las mismas estrategias para ambas poblaciones, de manera de aislar el efecto del factor de amortiguación. Los resultados son robustos a distinto número de replicaciones y puntos de reporte de utilidad de donde se toman las estadísticas.

Por último, en la sección IV se introduce el aprendizaje en las estrategias.

Los resultados de los experimentos sugieren que hay una relación entre la aversión al riesgo de los agentes y el precio de convergencia. Para terminar el trabajo se propone entonces un modelo que formaliza dicha intuición.

Finalmente, en la sección V se presentan las conclusiones principales de los experimentos.

Sección I

Analizaremos el juego del kiosco. El juego consiste en la venta de productos en kioscos; supongamos un número de kioskeros, *n*, que poseen un stock de productos idénticos y salen a venderlos cada mañana sin posibilidad de reabastecerse durante el día. Los productos que venden son perecederos así que perderán aquellos que no vendan. El costo de producción es fijo e igual a *c*, y la capacidad máxima fija es constante en el tiempo, *ymax*. Cada mañana un único consumidor sale a comprar productos con una cantidad de dinero en el bolsillo *M* que consumirá hasta agotar. Este cliente único organiza los kioscos según su precio de menor a mayor, y empieza a comprar a los precios más bajos del mercado hasta agotar totalmente su capital. Este juego se repite todas las mañanas indefinidamente. Los kioskeros siempre tienen la misma estrategia, salvo cuando se les permite aprender.

El juego consiste en determinar el precio óptimo de venta que debe tomar un kiosquero (*p**) para maximizar sus beneficios. El juego no tiene un equilibrio de Nash en el precio exacto al que podrían vender todos toda su cantidad y agotar el dinero del consumidor (*eqP*), ya que el último jugador al que le fuesen a vender podría siempre cambiar su estrategia unilateralmente y vender una única unidad a un precio mayor mejorando sus utilidades.

La solución del juego debe existir (Teorema de existencia de Nash) en estrategias mixtas como una función de distribución de probabilidad f pero encontrarla no es el objetivo del presente trabajo. En este caso buscamos un equilibrio en un tipo de estrategias muy particular.

Los vendedores tienen la oportunidad de ajustar su precio según los beneficios del paso anterior. Si no vendieron toda su producción, intuyen que pueden ser el vendedor marginal (de la última unidad) y deben bajar los precios en la jugada posterior en un porcentaje β. En cambio, si vendieron toda su producción los agentes deducen que no son el vendedor marginal y pueden subir su precio en α %. Cada jugador puede elegir un α y β distinto. Se busca encontrar la estrategia (definida como α y β) óptima en términos de beneficio total, la suma de los beneficios en cada paso del juego.

Se define al *precio de equilibrio* como la condición inicial, el precio del que parten todos los vendedores; *precio promedio* es el promedio de los precios que cobran los productores en cada paso. Luego de un cierto número de pasos, el precio promedio se vuelve constante y se convierte en el *precio de convergencia*. *Precio de corte* es al cual se vende la última unidad, luego de algunos pasos termina convergiendo al precio promedio.

Nuestra variable de estudio es el precio promedio, queremos estudiar a dónde converge luego de un cierto número de replicaciones. Este modelo capta un aspecto importante de la realidad: la complejidad (heterogeneidad) dentro del mismo estado estacionario. En términos de nuestro modelo, aun cuando el precio promedio converge al precio de equilibrio, hay algunos agentes que no venden porque su precio es mayor que el de equilibrio y hay otros que cobran menos del precio promedio.

Cabe señalar que el concepto de *equilibrio* utilizado en este trabajo difiere del concepto utilizado en la literatura económica clásica del "subastador walrasiano", sino que es entendido como un precio de estado estacionario. Es un promedio de precios que se caracteriza por su estabilidad en el tiempo y no necesariamente vacía los mercados: siempre hay vendedores que se quedan con parte de su producción sin vender y otros venden todo pero a un precio demasiado bajo.

Estudiaremos el comportamiento de distintas poblaciones de kioskeros (kioskeros, individuos, agentes o jugadores serán indistintos en adelante) con estrategias fijas y aleatorias; con estrategias fijas restringidas a una malla de posibilidades; con estrategias adaptativas; y finalmente con la posibilidad de realizar aprendizaje entre ellos.

En esta sección las estrategias con las que trabajaremos están fijas antes de que los agentes comiencen a transar. La variable fundamental de interés para nuestro trabajo será la relación entre el precio de convergencia (el precio promedio al cual venden los jugadores cuando éste se "estabiliza") y el precio de equilibrio (precio al cual todos los jugadores venderían toda su producción, o precio de "market-clearing"). Esta variable se llamará Ratio del Sistema.

Objetivo: En primer lugar, quisiéramos mostrar que el Ratio del Sistema es independiente de algunas variables del sistema. Luego veremos cómo cambia la dinámica del proceso si el vector de estrategias se restringe al caso en que $\alpha = \beta$ y cuando se deja que difieran. Por último, relacionaremos los resultados con el grado de aversión al riesgo de los vendedores.

Metodología: En un principio se cambia *M*, luego se cambia *Q*. Se cambian los rangos de alfas y betas, y el número de participantes.

Efecto de M en R

Queremos probar que la variable Money, el dinero que tiene el comprador para gastar, no tiene efecto sobre la variable Ratio del Sistema, *R*. Para ello cambiaremos los valores de *M* y veremos si esto altera la velocidad o la naturaleza de la convergencia del proceso, o el valor del Ratio del Sistema. Mantendremos el resto de las variables constantes: hay 29 firmas, α y β están restringidos a valores entre 0 y 0.2, cada firma tiene sólo una unidad a vender, se parte del precio que limpia los mercados, el costo unitario es del 10% del precio y se hacen 300 réplicas.

- $M = n = 29$ -> $eqP = 1$, $avgP = 1.9097$, R =1.9097
- $M = 5$ -> $eqP = 0.1724$, $avgP = 0.3293$, R =1.9097
- $M = 20$ -> $eqP = 0.6897$, $avgP = 1.3170$, R = 1.9097
- $M = 50$ -> $eqP = 1.7241$, $avgP = 3.2926$, R = 1.9097
- $M = 1000$ -> $eqP = 34.4828$, $avgP = 65.8510$, R = 1.9097

En efecto, vemos que R no cambia al alterarse los valores de M.

Efecto de Q en R

Ahora queremos probar que la variable *Quantity*, la cantidad máxima que tiene cada vendedor para ofrecer, tampoco afecta al Ratio del Sistema. Replicando el experimento anterior pero ahora variando Q (manteniendo el resto de las variables como ya se ha especificado y tomando $M = n = 29$).

- $Q = 1$ -> $eqP = 1$, $avgP = 1.9097$, R = 1.9097
- $Q = 7$ -> $eqP = 0.1429$, $avgP = 0.2728$, R = 1.9097
- $Q = 10$ -> $eqP = 0.1000$, $avgP = 0.1910$, R = 1.9097
- $Q = 100$ -> $eqP = 0.0100$, $avgP = 0.0191$, R = 1.9097
- $Q = 10000$ -> $eqP = 1.0000\text{e-}004$, $avgP = 1.9097\text{e-}004$, R = 1.9097

Nuevamente, vemos que al cambiar Q no cambia el valor de R.

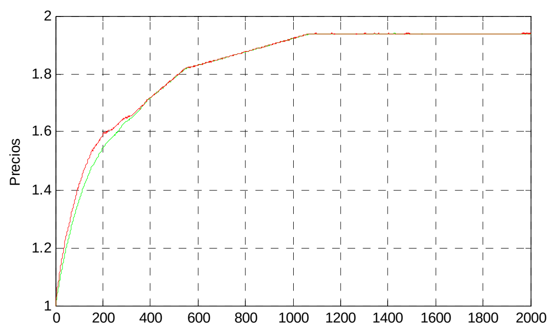
Resultados: Podemos fijar M y Q en cualquier valor sin temor a afectar la variable de interés, el Ratio del Sistema. En particular, sería conveniente fijar $M = n$ y $Q = 1$ de modo que $R = avgP$; o sea que basta con mirar al precio de convergencia para obtener la información relevante sobre el Ratio del Sistema.

A continuación estudiaremos el comportamiento de los precios que fijan los vendedores cuando se restringen las estrategias a que se suba y se baje el precio siempre en la misma proporción y contrastaremos estos resultados con los del caso en que se permite que la proporción en que suben los precios difiera de la proporción en que se bajan.

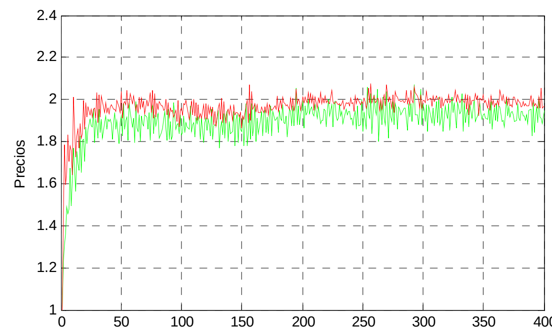
Estrategias simétricas

Al hablar de estrategias simétricas nos referimos a distintos valores de α y β que cumplan que $\alpha = \beta$.

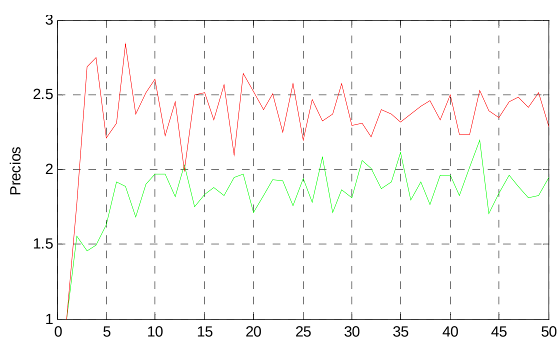
Comenzaremos con los valores de parámetros antes mencionados: hay 29 firmas, el comprador tiene tanto dinero para gastar como cantidad de firmas hay, cada firma tiene sólo una unidad a vender, se parte del precio que limpia los mercados, el costo unitario es del 10% del precio y se hacen 300 réplicas. A continuación analizaremos qué pasa cuando alteramos los valores que pueden tomar los parámetros α, β.



a,b <0.01



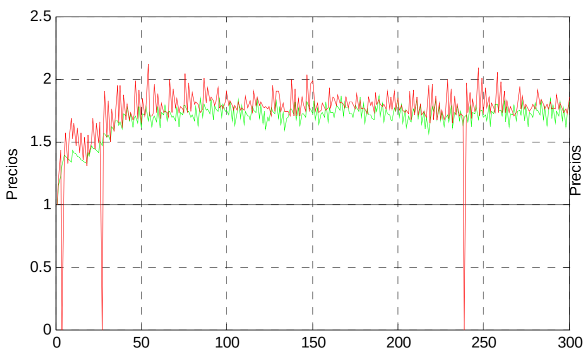
a,b<0.5



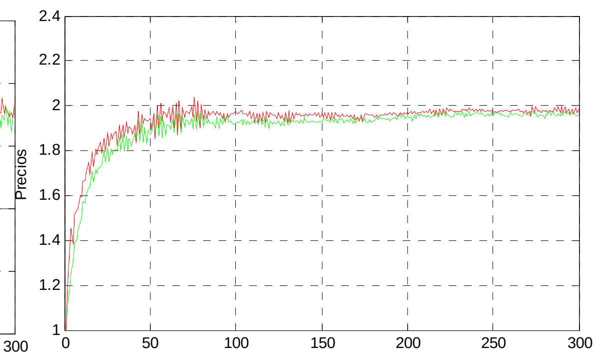
a,b irrestrictos

Resultados: En general, el Ratio del Sistema converge siempre a valores cercanos a 1.95. De los ejemplos recién vistos podemos decir que al aumentar el rango de valores posibles para los parámetros α , β suceden dos cosas. Por un lado, disminuye la cantidad de réplicas necesarias para que el sistema converja. Por el otro, tanto el precio de corte como el precio promedio se diferencian y fluctúan más alrededor del valor de convergencia.

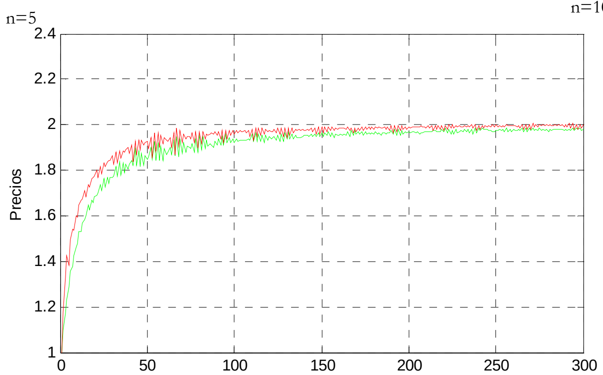
Ahora volveremos a los valores de referencia de α , β : menor a 0.2 y mantendremos los valores del resto de las variables pero cambiaremos el número de jugadores.



n=5



n=100

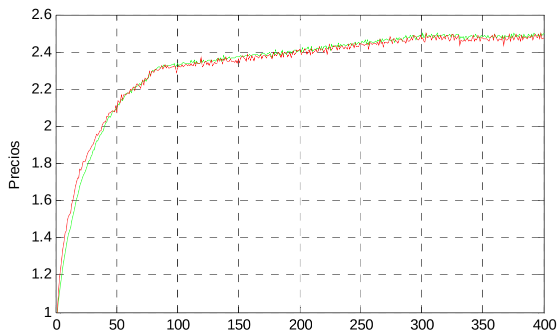


n=1000

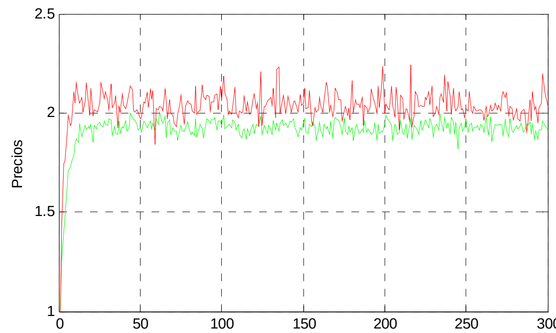
Resultados: De este análisis podemos concluir que al aumentar el número de jugadores el precio de convergencia (y por lo tanto el *Ratio del Sistema*) se acerca a 2 y las fluctuaciones disminuyen.

Estrategias asimétricas

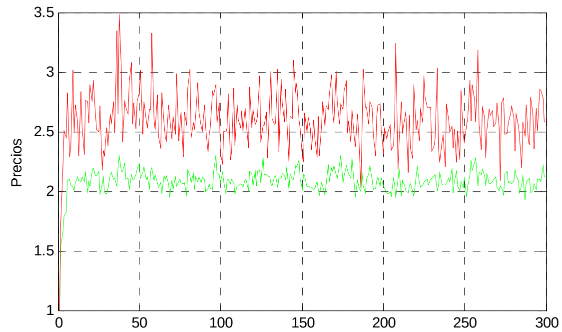
A continuación se repite el análisis para el caso en que no necesariamente $\alpha = \beta$. Si alteramos el rango de valores que pueden tomar dichos parámetros, cambia la velocidad y las características de los precios en el equilibrio:



a,b<0.1



a,b<0.5



a,b irrestrictos

Resultados: Al aumentar el rango de valores que pueden tomar los parámetros α, β suceden dos cosas. Por un lado, disminuye la cantidad de réplicas necesarias para que el sistema converja. Por el otro, tanto el precio como el precio promedio se diferencian y fluctúan más alrededor del valor de convergencia.

Resultados: Si ahora cambiamos el número de jugadores, vemos que a medida que aumenta el número de participantes en el sistema tanto el precio de corte como el precio de convergencia fluctúan mucho menos. Los gráficos se omiten pues guardan gran semejanza con los presentados en la subsección "Estrategias simétricas".

Relación aversión al riesgo – beneficio

Queremos testear si la aversión al riesgo óptima es constante para toda la duración del experimento o si es conveniente ser más (menos) averso al comienzo del mismo o viceversa.

En un primer acercamiento, vemos que en el experimento con 29 firmas, α y β restringidos a valores entre 0 y 0.2, cada firma tiene sólo una unidad a vender, partiendo del precio que limpia los mercados, el costo unitario es del 10% del precio, 300 réplicas y 29 pesos a gastar; la estrategia ganadora para los primeros 50 pasos tiene α =0.004 y β =0.006, con un $\gamma = 3$. Al mirar el mismo contexto pero restringiéndonos a los últimos 50 pasos, α =0.004 y β =0.006, con $\gamma = 2/3$. El ratio $\gamma = \dfrac{\alpha}{\beta}$ dado por la inversa de la aversión al riesgo del agente (o para decirlo de otra manera, γ se asocia con el "amor al riesgo"), parece disminuir a medida que pasan los pasos.

Cuando se deja que α y β tomen cualquier valor, y se mira la estrategia óptima para los primeros 50 pasos, α =0.0649 y β =0.3505 con un γ =0.1851; mientras que para los últimos 50 pasos la estrategia óptima es con α =0.0018 y β =0.1024 con un γ =0.0175. El patrón es el mismo, a medida que pasa el tiempo, la estrategia ganadora es la de menor γ.

Otra forma de ver este fenómeno es notando que cuanto más alejado está el precio de convergencia del precio de equilibrio, más arriesgada será la estrategia óptima.

Puede racionalizarse estos resultados notando que en un primer momento hay relativamente mucho dinero en el mercado porque los precios son bajos, entonces ganan quienes tienen estrategias más arriesgadas (mayor γ). Más luego quienes dan saltos menores ganan más porque pierden menos cuando se pasan del precio máximo de venta.

Es importante notar que las estrategias ganadoras no son siempre las mismas, es decir, la ganadora ante un conjunto de estrategias puede no serlo ante otro. Depende de contra quién se compita, del resto de los jugadores.

A continuación se analizará si una vez en el equilibrio, conviene tener estrategias más o menos arriesgadas en relación al resto de los competidores. La evidencia de los experimentos sugiere que la relación entre γ y el beneficio es negativa. Las estrategias menos arriesgadas (con menor γ) resultan ser las más exitosas. Esto puede explicarse porque estos agentes, una vez que encuentran el precio de equilibrio van a quedarse más tiempo por debajo y cerca del mismo, vendiendo un mayor número de veces y obteniendo beneficios más veces que el resto de los agentes más arriesgados.

Sección II

Objetivo: El objetivo del experimento 2 es encontrar la estrategia óptima de alfas y betas para distintos rangos posibles de estas variables. La estrategia óptima se define como aquella que genera los mayores beneficios. De esta forma se busca dar cuenta del efecto que tienen las estrategias de los demás jugadores sobre la estrategia óptima de un individuo particular.

Metodología: Se cambian los rangos de alfas y betas, aumentándolos y disminuyéndolos para lograr captar el efecto de “la estrategia de los demás jugadores”. Se busca ver cómo cambia el conjunto de estrategias óptimas en cuatro experimentos con distintos rangos de alfas y betas.

Resultados: En la presente sección se exponen los resultados para cuatro experimentos con distintos rangos de alfas y betas.

1. Resultados para a з [0,0.1] y β з [0,0.2]

En la tabla 2.1 puede observarse el conjunto de mejores estrategias para el rango de alfas y betas seleccionado. Cabe destacar que los valores de alfa se mantienen constantes mientras que los de beta cambian. Esto podría estar indicando que en el óptimo, dadas las estrategias de los demás jugadores, lo que importa es el valor de alfa que en este caso es muy cercano a 0.

Tabla 2.1		
Estrategia óptima		
α	**β**	**Beneficios**
0.0100	0.0800	0.5963
0.0100	0.0700	0.5961
0.0100	0.0900	0.5945
0.0100	0.1000	0.5923

Además los resultados de este experimento son expuestos en un gráfico de malla que muestra los beneficios que se generan con las distintas estrategias de los jugadores.

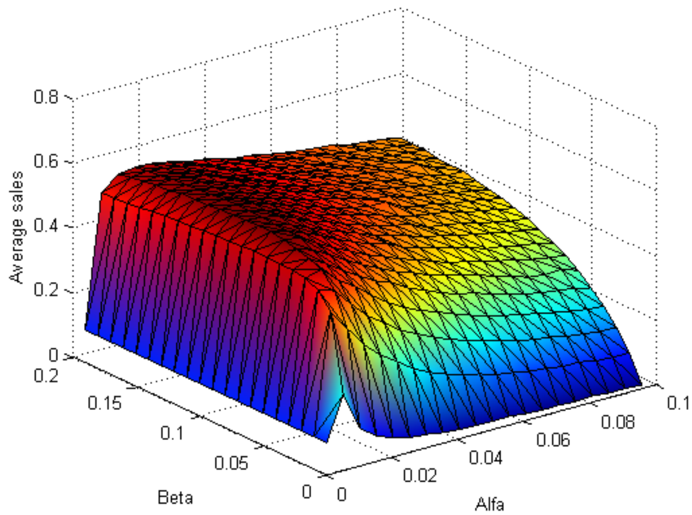


Gráfico 2.1

El precio promedio que surge de este experimento es 1.6391, el precio de corte es 1.7143 y el ratio del sistema es 1.6391.

2. Resultados para a з [0.05,0.15] y β з [0.05,0.25]

En la tabla 2.2 puede observarse el conjunto de mejores estrategias para el rango de alfas y betas seleccionado. Cabe destacar que, al igual que en el caso anterior, los valores de alfa se mantienen constantes mientras que los de beta cambian. Esto podría estar indicando que en el óptimo, dadas las estrategias de los demás jugadores, lo que importa es el valor de alfa que en este caso toma el valor mínimo posible dentro del rango.

Tabla 2.2		
Estrategia óptima		
α	**β**	**Beneficios**
0.0500	0.1600	0.5619
0.0500	0.1700	0.5603
0.0500	0.1900	0.5591
0.0500	0.1500	0.5591

En el siguiente gráfico de malla puede observarse cómo los beneficios máximos se encuentran en el punto de corte de los alfas y no dependen tanto de los betas.

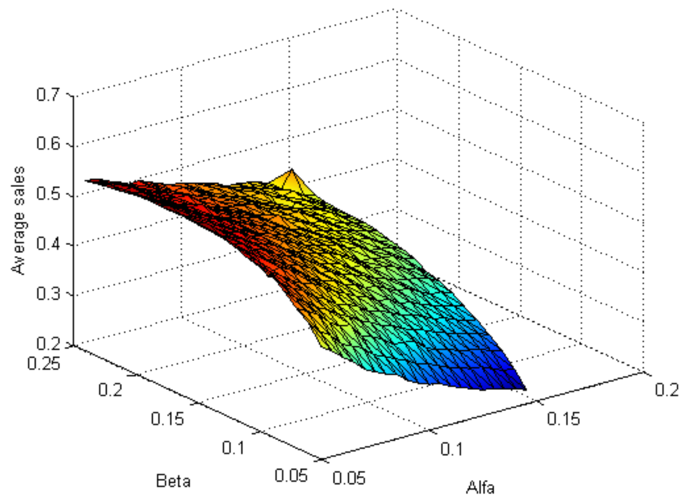


Gráfico 2.2

El precio promedio que surge de este experimento es 1.7211, el precio de corte es 1.7784 y el ratio del sistema es 1.7211.

3. Resultados para a з [0.0,0.15] y β з [0.0,0.25]

Los resultados de este experimento son similares a los del primer caso. Los valores óptimos de alfa son cercanos a 0 y los de beta varían. Notar que los beneficios en este caso son mayores que en los anteriores. Esto podría deberse a que la variable clave de decisión es el alfa y en este caso el rango de alfas comienza en cero y es mayor que en el primer experimento.

Tabla 2.3		
Estrategia optima		
α	**β**	**Beneficios**
0.0150	0.1000	0.6734
0.0150	0.1250	0.6717
0.0150	0.1125	0.6704
0.0150	0.0875	0.6672

A continuación se expone el gráfico de malla para el rango estudiado. Puede observarse que los beneficios son muy bajos con α=0 pero son máximos con un valor de esta variable cercano a 0.

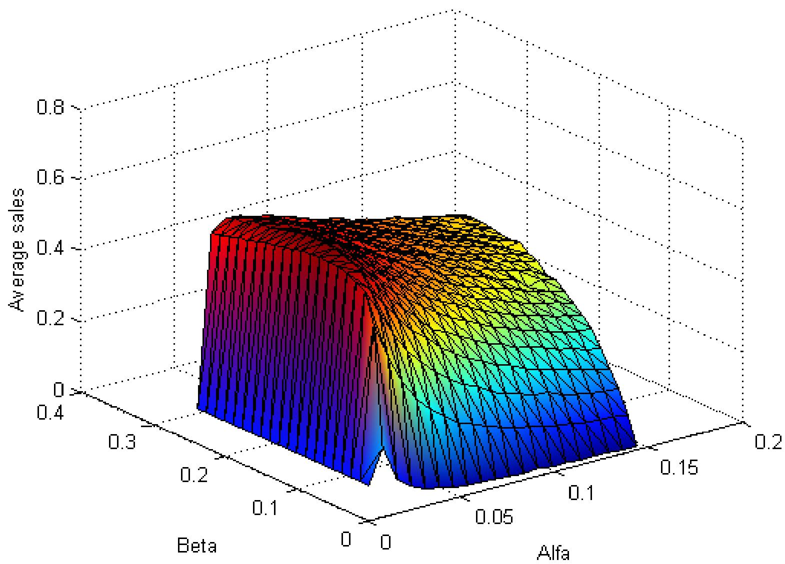


Gráfico 2.3

El precio promedio que surge de este experimento es 1.7354, el precio de corte es 1.8304 y el ratio del sistema es 1.7354.

4. Resultados para a ɜ [0.05,0.1] y β ɜ [0.05,0.2]

Los resultados de este experimento son muy similares a los del segundo caso. Aumentar el rangote betas no genera grandes cambios.

Tabla 2.4		
Estrategia optima		
α	β	Beneficios
0.0525	0.1850	0.5056
0.0500	0.1625	0.5017
0.0500	0.1475	0.4991
0.0500	0.1925	0.4988

A continuación se expone el gráfico de malla para el rango estudiado.

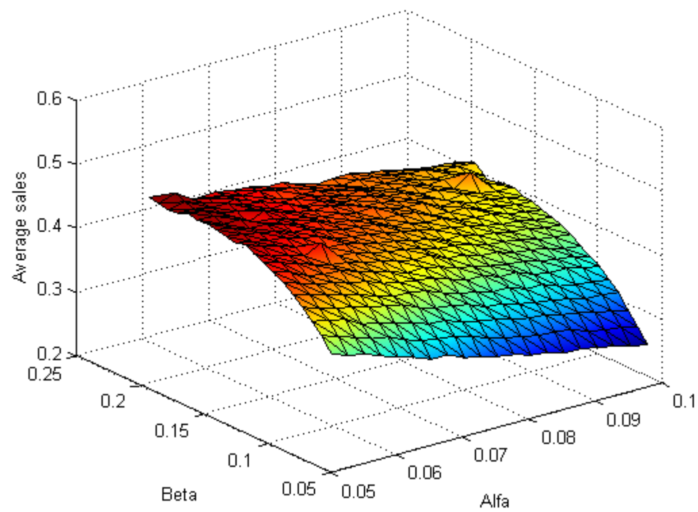


Gráfico 2.4

El precio promedio que surge de este experimento es 1.6511, el precio de corte es 1.6978 y el ratio del sistema es 1.6511.

Conclusión: Luego de observar los resultados de los distintos experimentos la conclusión principal es que la estrategia óptima para un individuo varía cuando cambian los rangos, esto quiere decir que no hay una estrategia óptima absoluta sino que ésta depende de las estrategias de los demás jugadores.

Además, cabe destacar que las estrategias óptimas de α y β siguen un patrón particular. Los α óptimos son cercanos a 0.01, mientras que los β óptimos cambian dentro de un rango más amplio. Es importante aclarar que cuando α es igual a 0 los beneficios son constantes y bajos sin importar el valor de β. Esto se debe a que partiendo del equilibrio la diferencia entre el precio de equilibrio y el precio de corte es lo suficientemente grande como para dar un margen a aumentar el precio. Por lo tanto, los jugadores que no aumenten su precio, (α=0), dadas las estrategias de los demás jugadores, tendrán beneficios constantes bajos. Sin embargo, aquellos que aumenten un poquito el precio (α cercano a 0.01) tendrán los beneficios máximos. Por lo tanto, para llegar al óptimo la decisión está en cuánto alejarse del 0. Esto puede observarse en los gráficos de las mallas 1 y 3.

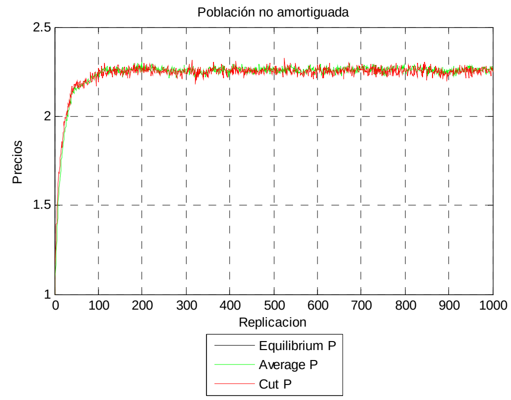
Sección III

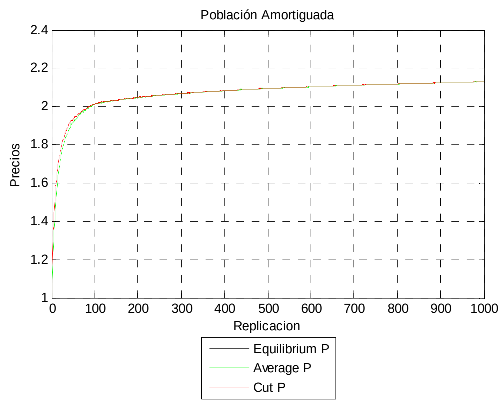
Objetivo: El objetivo del experimento 3 es muy parecido al experimento 1, incorporando un amortiguador. Para incorporar el efecto del amortiguador se dividen las variables alfa y beta por $1+n\delta$, donde n es el número de veces que no venden. Nótese que la única diferencia con el experimento 1 es que si ahora los jugadores no venden en el periodo anterior, los jugadores en la siguiente jugada o experimento reducirán su precio en la magnitud $\beta/1+n\delta$. De la misma forma en caso de vender su unidad en el siguiente experimento subirán su precio en la magnitud $\alpha/1+n\delta$. En primer lugar se busca observar como modificando las estrategias por un amortiguador delta se converge de manera más suave al equilibrio y como se modifican los niveles de utilidad. En segundo lugar, se comparará el comportamiento de una población amortiguada y una no amortiguada dentro de una misma simulación.

En resumen lo que se investigara en esta sección:

1. Se busca observar como modificando las variables alfa y beta por un amortiguador delta se converge de manera más suave al equilibrio.
2. Dados alfa y beta aleatorios se prueba con distintos valores de delta como se modifican las utilidades (el rango de variación de delta es de 0,25 a 2). De esta manera se observa cómo cambian las utilidades/beneficios de los individuos ante cambios de delta dejando fijas las variables alfa y beta a lo largo de las simulaciones.
3. Luego con otros alfa y beta se repite el punto 1 y se demuestra que el ranking de utilidades se mantiene (delta es el parámetro dominante).
4. Se compara el comportamiento de una población amortiguada y una no amortiguada dentro de una misma estrategia.
5. Finalmente se comprueba si las conclusiones son robustas a cambios en el número de replicaciones y a modificaciones del área de estadísticas descriptivas.

Resultados: En los siguientes gráficos se puede observar como una población amortiguada converge de manera más suave al precio de equilibrio, lo cual es lógico dado que se suavizan las subas y bajas de precios a lo largo de las distintas simulaciones al dividir las variables alfa y beta por el amortiguador. Asimismo en la población amortiguada el precio converge mucho más lento y a un precio de equilibrio inferior del que convergería en una población no amortiguada.





En la tabla 3.1 puede observarse que si todos los jugadores amortiguan en el mismo nivel, a mayor valor del amortiguador menor es el nivel de utilidades de los individuos. Cabe señalar que a medida que todos los individuos aumentan el delta en el mismo valor, el ranking de beneficios de los jugadores se mantiene. Lo único que varía es el beneficio de cada jugador por separado. Esto puede deberse a que a mayor valor del amortiguador el precio de convergencia se acerca más al precio de equilibrio, reduciendo de las utilidades en cada una de las ventas.[1]

Tabla 3.1

Alfa	Beta	Delta1	Beneficio1	Delta2	Beneficio2	Delta3	Beneficio3	Delta	Beneficio4
0.0095	0.0493	0.2500	1.03	0.5000	1.007	0.7500	0.9504	1	0.9185
0.0202	0.0783	0.2500	0.9736	0.5000	0.9522	0.7500	0.8974	1	0.8681
0.0576	0.1495	0.2500	0.8812	0.5000	0.8610	0.7500	0.8079	1	0.7800
0.0702	0.1836	0.2500	0.8802	0.5000	0.8596	0.7500	0.8055	1	0.7800
0.0805	0.1796	0.2500	0.8434	0.5000	0.8220	0.7500	0.7721	1	0.7470
0.0702	0.1350	0.2500	0.8073	0.5000	0.7885	0.7500	0.7423	1	0.7202
0.0700	0.1244	0.2500	0.7849	0.5000	0.7685	0.7500	0.7248	1	0.7049
0.0430	0.0595	0.2500	0.7302	0.5000	0.7176	0.7500	0.6872	1	0.6742
0.0825	0.1060	0.2500	0.6948	0.5000	0.6819	0.7500	0.6454	1	0.6289
0.1757	0.1915	0.2500	0.6374	0.5000	0.6246	0.7500	0.5976	1	0.5952

[1] En la tabla 3.1 por simplicidad se presentan solo los resultados modificando el delta de 0,25 a 1. Las mismas simulaciones se hicieron con un rango de delta de 1 a 2 y los resultados se mantienen.

Este resultado se mantiene aun con distintas variables alfa y beta. Por motivos de simplicidad solo se muestran los resultados con dos tipos de alfa y beta. En la tabla 3.2 se puede observar como los resultados no se alteran si los individuos cambian de alfa y beta

Tabla 3.2

Alfa	Beta	Delta1	Beneficio1	Delta2	Beneficio2	Delta3	Beneficio3	Delta4	Beneficio4
0.0132	0.1539	0.2500	0.8487	0.5000	0.8482	0.7500	0.8136	1	0.7778
0.0175	0.1503	0.2500	0.8263	0.5000	0.8268	0.7500	0.7935	1	0.7590
0.0268	0.1169	0.2500	0.7534	0.5000	0.7552	0.7500	0.7259	1	0.6961
0.0519	0.1509	0.2500	0.6897	0.5000	0.6903	0.7500	0.6715	1	0.6512
0.0173	0.0454	0.2500	0.6882	0.5000	0.6873	0.7500	0.6651	1	0.6387
0.0494	0.1348	0.2500	0.6797	0.5000	0.6791	0.7500	0.6556	1	0.6296
0.0528	0.1403	0.2500	0.6752	0.5000	0.6760	0.7500	0.6510	1	0.6263
0.0603	0.1193	0.2500	0.6203	0.5000	0.6196	0.7500	0.5999	1	0.5769
0.0704	0.1236	0.2500	0.5948	0.5000	0.5971	0.7500	0.5761	1	0.5562
0.0696	0.1205	0.2500	0.5930	0.5000	0.5933	0.7500	0.5740	1	0.5548

En la tabla 3.3 se presentan los resultados con una población mitad amortiguada y mitad no amortiguada dentro de una misma simulación. Cabe señalar, que se muestran los resultados con los mismos valores de alfa y beta entre la población amortiguada de manera de poder aislar el efecto del amortiguador. Lo que se encuentra es que la población amortiguada tiene un mayor nivel de utilidad. Por ejemplo si comparamos al Jugador 1 que se encuentra dentro de la población que amortigua con el Jugador 4 que tiene los mismos valores de alfa y beta y no amortigua se puede observar como el Jugador 1 tiene un mayor beneficio. Y así se puede observar con todos los jugadores.

Tabla 3.3

Jugadores	Alfa	Beta	Delta	Beneficio
J1	0.0132	0.1539	0.2500	0.7975
J2	0.0175	0.1503	0.2500	0.7772
J3	0.0268	0.1169	0.2500	0.7178
J4	0.0132	0.1539	0	0.6622
J5	0.0175	0.1503	0	0.6488
J6	0.0528	0.1403	0.2500	0.6465
J7	0.0268	0.1169	0	0.6178
J8	0.0528	0.1403	0	0.5426

Asimismo cabe señalar que este resultado se mantiene a distintos valores del amortiguador. Los resultados son robustos a distinto número de replicaciones y áreas de reporte de estadísticas.[2]

En resumen tenemos dos resultados principales:

1. Si todos los jugadores deciden amortiguar en el mismo nivel, se observa que a mayor valor del amortiguador menor es el nivel de utilidad.
2. Cuando conviven dos poblaciones una amortiguada y una no, la población amortiguada obtiene mayores beneficios.

La intuición detrás del primer resultado es que si todos los jugadores coordinan dentro de una misma estrategia tener todos el mismo amortiguador obtienen un beneficio menor que el obtendrían si no hubiesen coordinado a amortiguarse. Y asimismo cuanto mayor es el valor del amortiguador lógicamente menor es el beneficio.

La intuición detrás del segundo resultado es que los jugadores de la población amortiguada disminuyen en un menor nivel el precio (en caso de no venta de su unidad en el periodo anterior) y aumentan en un menor nivel (en caso de venta de su unidad en el periodo anterior) de manera de estar más cerca del precio de corte y así venden a un precio más alto del que venderían de no estar amortiguados. Este resultado no se daba cuando a través de distintas simulaciones aumentábamos el delta (es decir en el primer ejercicio) debido a que ahí no había una convivencia de los dos tipos de poblaciones.

Es importante notar que el objetivo de esta sección es solo sugerir ciertos resultados y debería ser profundizada en una futura investigación.

[2] Todos los resultados que se mencionan a lo largo del trabajo y no se presentan los resultados se encuentran disponibles a pedido del lector.

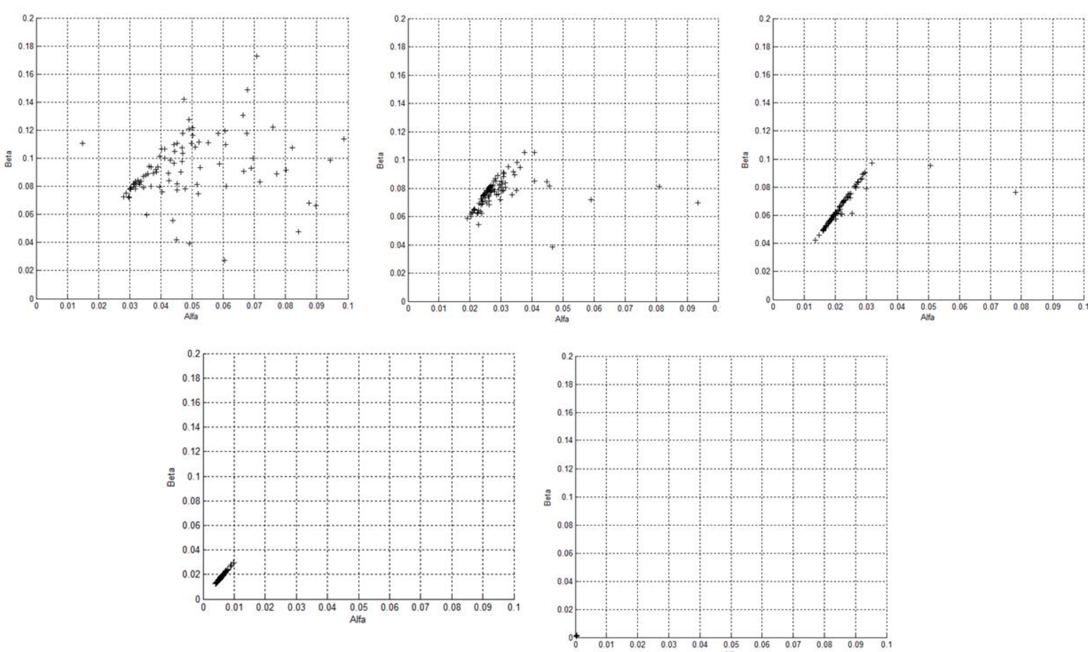
Sección IV

Aprendizaje

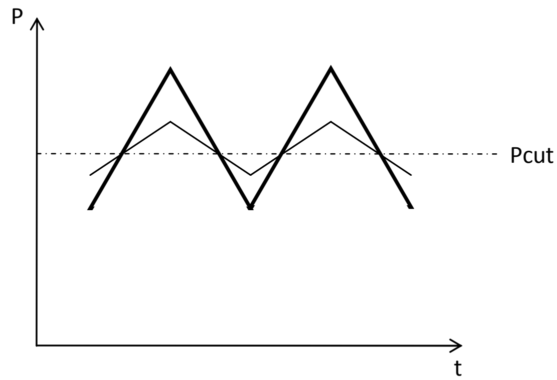
Para esta sección de aprendizaje supondremos la existencia de algún mecanismo de recolección y publicación de información, como una cámara de comercio de kioskeros, que guarde la información correspondiente a las estrategias y utilidades obtenidas por cada uno de los jugadores a través de la historia.

Una parte de la población de jugadores (%aprendizaje) aprenderá de aquellos que vayan teniendo mayor éxito a medida que avanza el juego. El aprendizaje consistirá en realizar un promedio ponderado aleatoriamente entre la estrategia propia y la estrategia del jugador que haya obtenido mayores utilidades promedio en un periodo de tiempo dado (memoria). La población inicialmente se distribuye aleatoriamente en un rectángulo para valores de alfa y beta, y en cada juego aleatoriamente se selecciona al azar una proporción de jugadores que aprenden. Simultáneamente todos los jugadores cambian sus estrategias en búsqueda de mejores resultados a través de un movimiento aleatorio alrededor de su estrategia inicial, un pequeño ruido también proporcional a su estrategia actual.

Resultados: Se realizaron múltiples experimentos donde el comportamiento de las estrategias (alfa, beta) a través del tiempo tuvo un patrón muy similar que representamos gráficamente en el siguiente resumen de comportamiento.

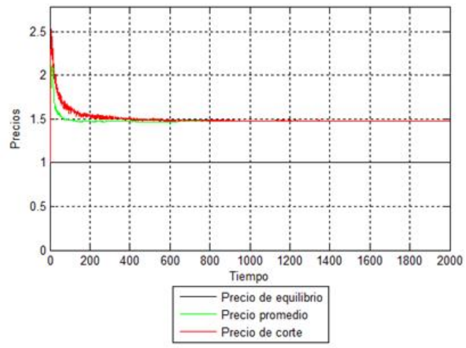


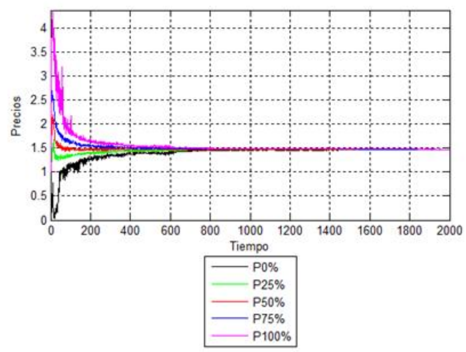
Con este tipo de aprendizaje, los individuos progresivamente se acercaban a una única línea de pendiente beta/alfa, y sobre esta se movían por un tiempo (hacia arriba y hacia abajo pero siempre sobre la misma línea) hasta que eventualmente iniciaban su convergencia al origen. La convergencia hacia la misma línea se da por un efecto coordinativo, ya que para cualquier estrategia sobre la misma línea existe el mismo periodo de ciclo (tiempo entre valle y valle o cresta y cresta en el ciclo de precios), y cuando una porción de población se coordina en un tiempo de ciclo, para el resto de la población es conveniente también sincronizarse para maximizar su beneficio. De esta manera los jugadores logran a través de una coordinación no cooperativa turnarse las oportunidades de vender a precios altos, y el no estar coordinado le impide a un jugador tomar ventaja de estas oportunidades cuando llega su turno.

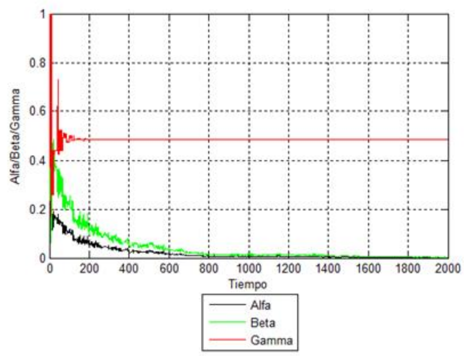


Las estrategias empiezan a converger hacia el origen ya que para dos jugadores sincronizados en sus tiempos de ciclo, el tener saltos más pequeños hace que el jugador más prudente el momento de vender siempre lo haga a precios mayores que el jugador menos prudente. De esta manera los jugadores menos prudentes van aprendiendo de los más prudentes y empiezan a converger sobre la misma línea (beta/alfa) hacia el origen.

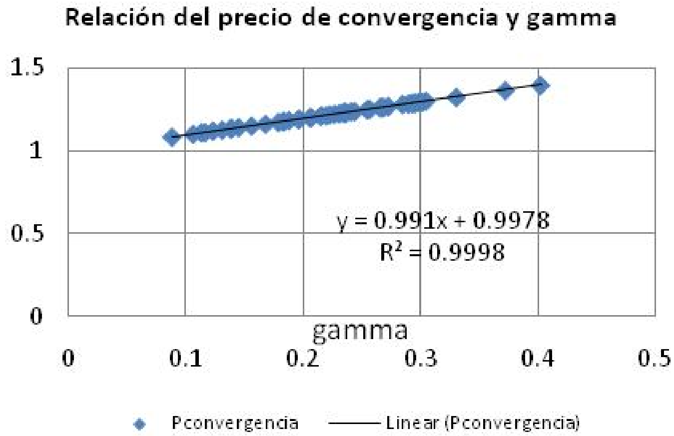
Este patrón se repitió para distintos rectángulos de estrategias iniciales, longitudes de memoria, proporciones de aprendizaje para la población, y niveles de ruido. La única diferencia encontrada fue la velocidad de convergencia, que podía ser muy rápida o muy lenta dependiendo de los valores de estos parámetros. A saber, a mayor proporción de población aprendiendo, mayor memoria y mayor ruido encontramos una mayor la velocidad de aprendizaje; pero valores bajos en cada uno de estos parámetros rara vez no convergieron en los numerosos experimentos que realizamos (50 experimentos, de 1000 a 5000 juegos cada uno para 15 distintas combinaciones de estos parámetros).







En la evolución del sistema monitoreamos el precio promedio de venta, el precio de corte (grafica superior), distintos cuartiles de precios (grafica del medio), y el comportamiento de la mejor estrategia en el tiempo (grafica inferior). En todos los casos aunque el tiempo de convergencia variaba el comportamiento era bastante similar al expuesto en este ejemplo. El precio de corte y convergencia evolucionaban hasta converger uno muy cerca del otro; como mostraremos más adelante, este precio de convergencia está íntimamente ligado a la proporción de individuos que venden en cada jugada y al efecto de coordinación para realizar estas ventas. Los precios de los distintos cuartiles convergen al mismo punto que el precio de promedio y de corte, lo que nos indica que todos los jugadores están poniendo casi el mismo precio, pero gracias al efecto de coordinación no cooperativo se están turnando para realizar o no una venta. Si llamamos gamma a la razón alfa/beta, podemos ver que rápidamente los jugadores convergen a un gamma estable a lo largo del cual lentamente empiezan a moverse hacia el origen.



A medida que realizamos experimentos encontramos que sin importar la configuración de los parámetros parecía existir una relación implícita entre el precio de corte y el valor de gamma (alfa/beta). Teniendo en cuenta que los jugadores cuando aprender convergen rápidamente a un mismo valor de gamma, y que luego paulatinamente empiezan a acercarse al origen, y motivados por los resultados, intentamos estudiar la relación más adelante.

Modelo:

Por más que en los experimentos hemos usado estrategias "multiplicativas", del estilo

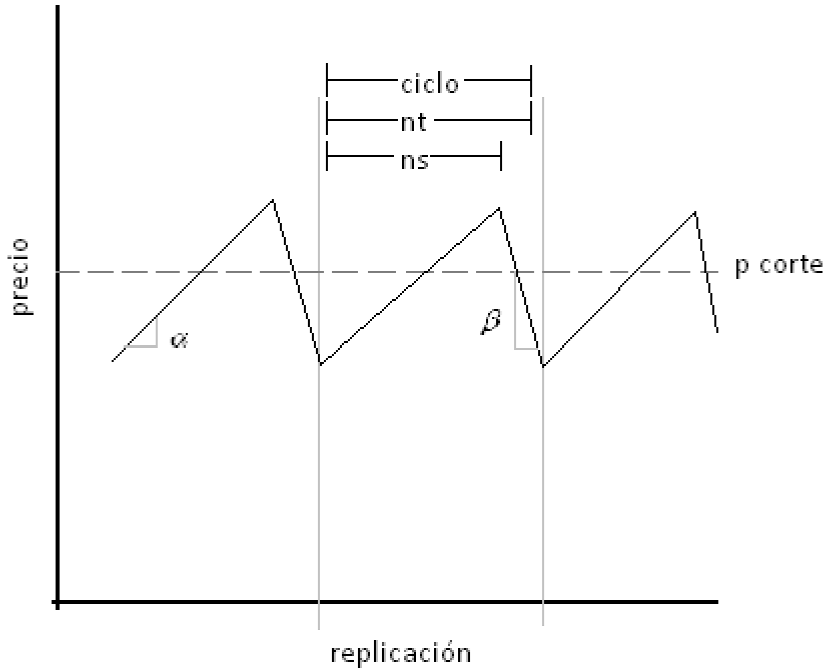
$$p_{t+1} = \begin{cases} p(1+\alpha) & \text{si vende todo} \\ p(1-\beta) & \text{si no} \end{cases}$$

en el modelo que presentaremos a continuación las estrategias serán lineales por motivos de simplicidad. Cabe notar que ambos enfoques son muy similares cuando tanto α como β son lo suficientemente pequeños (cercanos a cero).

En el caso lineal:

$$p_{t+1} = \begin{cases} p+\alpha & \text{si vende todo} \\ p-\beta & \text{si no} \end{cases}$$

Comencemos restringiendo el análisis al caso con $\alpha < \beta \Rightarrow \gamma < 1$. Por ejemplo, $\gamma = \frac{1}{2}$.



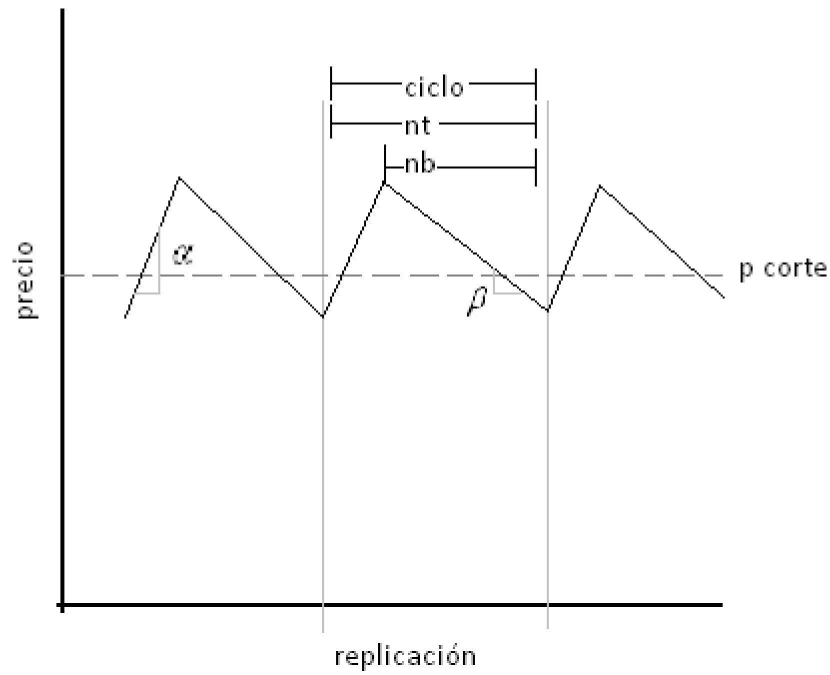
$ns\alpha = \beta \;\Rightarrow\; ns = \dfrac{\beta}{\alpha} = \gamma^{-1}$. Se asume que $ns \in \mathrm{N}$.

$nt = ns + 1 = \gamma^{-1} + 1$

El agente sube el precio cuando vende, entonces vende una proporción $\Pi = \dfrac{\gamma^{-1}}{\gamma^{-1}+1} = \dfrac{\beta}{\beta+\alpha}$ de las veces. Como $q.P_c\Pi = M$ y $q.P_e.1 = M \;\Rightarrow\; P_c\Pi = P_e \;\Rightarrow$

$$P_c = (1+\gamma)P_e \tag{1}$$

Si ahora $\alpha > \beta \Rightarrow \gamma > 1$, por ejemplo, $\gamma = 2$



En este caso,

$nb\beta = \alpha \Rightarrow \; nb = \dfrac{\alpha}{\beta} = \gamma$. Además, $nt = nb + 1$ ya que si el agente baja el precio, es porque no vendió. No vende una proporción $1 - \Pi = \dfrac{\gamma}{\gamma + 1}$ de las veces, por lo tanto vende una proporción $\Pi = 1 - \dfrac{\gamma}{\gamma+1} = \dfrac{1}{\gamma+1} = \dfrac{\beta}{\beta+\alpha}$ de las veces. Al igual que en el caso anterior,

$$P_c = (1+\gamma)P_e \tag{1}$$

Comportamiento de las utilidades (profit) promedio en el límite

En el caso $\gamma < 1$, los jugadores parten cada ciclo de un precio por debajo del precio de corte y van subiendo el precio (más de una vez) antes de superar el precio de corte. Como vimos $ns = \beta / \alpha = \gamma^{-1}$, y dado que después de ns subidas de precio necesariamente superamos el precio de corte tenemos que

$p < pc \wedge p + ns\alpha > pc \Rightarrow pc - ns\alpha < p < pc - (ns-1)\alpha$, tomando el caso límite cuando alfa tiende a cero tenemos que $p \xrightarrow[\alpha \longrightarrow 0]{} pc$. Sabíamos que los jugadores venden una proporción $\Pi = \beta/(\beta+\alpha) = (1+\gamma)^{-1}$ de las veces, entonces las utilidades promedio están dadas por

$$\overline{\pi} = (\Pi * pc - c)q$$
$$< \Pi = (1+\gamma)^{-1}, pc = (1+\gamma)pe >$$
$$\overline{\pi} = (pe - c)q$$

En el caso $\gamma > 1$, el precio en el que los jugadores parten cada ciclo de un precio menor al precio de corte y en el siguiente paso lo superan. Luego deben bajar el precio un número nb de veces para volver a estar de nuevo debajo del precio de corte. Tenemos entonces que

$p < pc \wedge p + \alpha > pc \Rightarrow pc - \alpha < p < pc$, tomando el caso límite cuando alfa tiende a cero tenemos nuevamente que $p \xrightarrow[\alpha \longrightarrow 0]{} pc$, y dado que la proporción de veces que vende sigue siendo $\Pi = \beta/(\beta+\alpha) = (1+\gamma)^{-1}$, entonces las utilidades promedio, por el mismo argumento anterior, son también $\overline{\pi} = (pe - c)q$.

En ambos casos, el profit promedio en el infinito es el mismo que si hubiesen jugado coordinadamente con un precio estable igual al precio de equilibrio (de market clearing), el cual como habíamos mencionado no es un equilibrio de Nash.

Sección V

Del análisis de las secciones anteriores podemos sacar varias conclusiones. En primer lugar, no existe una estrategia óptima (alfa, beta) para este juego, la estrategia óptima dependerá de las estrategias de los otros jugadores.

Además, las estrategias que se adaptan a las condiciones del juego son mejores a las estrategias estáticas, tanto en el caso de estrategias adaptativas como en el caso de aprendizaje.

En el caso del aprendizaje existe un efecto coordinativo que lleva a todos los jugadores a tomar estrategias con un mismo gamma para sincronizar sus ciclos de venta. Luego de sincronizarse es siempre más conveniente tener estrategias más prudentes, de este modo las estrategias convergen, sin llegar a colapsar, al origen.

Por otro lado, no existe un equilibrio estático de estrategias del tipo (α, β) ya que las estrategias evolucionan hacia un el origen y el (0,0) no constituye un equilibrio de Nash.

Finalmente, dado que la cantidad de dinero a repartir entre todos los jugadores es constante, en cualquier equilibrio las utilidades promedio de los jugadores deberían ser las mismas que si todos los jugadores hubieran jugado coordinadamente en el precio de market clearing, logramos probar esto en el caso límite con las estrategias particulares de nuestro juego.

Referencias

Dopfler, K. (ed.) (2005). *The Evolutionary Foundations of Economics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Heymann, D.; R. Perazzo y M. Zimmermann (2008). *Modelos Económicos con Múltiples Agentes*. Working paper. Universidad de San Andrés.

Kimura, M. (1983). *The neutral theory of molecular evolution*. Cambridge: Cambridge University Press.

Navarro, A. (2008). *Economía, Biología y Evolución*. Presentación en la XLIII Reunión Anual de la AAEP, Noviembre.