

# **Coordinación descentralizada en equilibrios de mercado: algunos efectos del aprendizaje evolutivo aplicado a distintos conjuntos de información <sup>9</sup>**

Karina Otero <sup>φ</sup>

Noviembre, 2006

## **Síntesis**

La teoría microeconómica obtiene resultados ampliamente estudiados acerca de la relación entre las cantidades y precios de equilibrio en modelos oligopólicos de Cournot y de competencia perfecta. Sin embargo, la coordinación de los agentes económicos en los posibles equilibrios implica la disponibilidad de información no trivial.

El presente trabajo propone dos procesos de aprendizaje y adaptación que reducen sustancialmente la información que las firmas necesitan para coordinarse en diferentes equilibrios de mercado. Estos mecanismos utilizan algoritmos genéticos, que operan con la información disponible a nivel firma, para determinar las cantidades de producto que cada una de ellas esta dispuesta a ofrecer.

Estos procesos de aprendizaje se simulan computacionalmente para obtener resultados comparables con los que surgen del enfoque teórico con información completa y agentes racionales. Dentro del restringido conjunto de información disponible para cada firma, los datos que sean capaces de procesar (para determinar las cantidades ofrecidas) afectan el equilibrio de mercado alcanzado. Estos equilibrios pueden resultar cercanos al resultado del modelo de Cournot o bien aproximarse al de competencia perfecta.

---

<sup>9</sup> Trabajo final para el curso de Racionalidad Acotada. Profesores, Daniel Heymann, Roberto Perazzo y Martín Zimmermann. Maestría en Economía de la Universidad de San Andrés.

<sup>φ</sup> e-mail: otero\_k@yahoo.com.ar

## Introducción

La disponibilidad de información clave permite que los agentes puedan comportarse estratégicamente en un contexto de competencia oligopólica<sup>1</sup>. Por otro lado, en el caso extremo donde existen una gran cantidad de firmas en el mercado, aquellas que conocen este hecho cuentan con información de relativamente fácil acceso para maximizar sus beneficios, ya que es suficiente con observar los precios de mercado y sus propias condiciones de producción.

En el caso de competencia de tipo Cournot, algunos trabajos recientes exploran las condiciones bajo las cuales un duopolio converge al equilibrio de Cournot. Entre ellos se encuentran los trabajos de Bischi y Kopel (2001), Puu (1998), Chiarella y Khomin, (1996), Kopel (1996). Estos modelan formas de aprendizaje de los agentes que les permiten reaccionar a las acciones de sus competidores para alcanzar dicho equilibrio, dadas distintas hipótesis sobre la formación de expectativas y las características claves del mercado. En función de las condiciones iniciales, las complejas dinámicas pueden no converger a un equilibrio o conducir a uno o más equilibrios de mercado<sup>2</sup>.

Si bien el alcance del presente trabajo es modesto como para ser comparado con los resultados anteriormente expuestos, el objetivo es analizar algunas de las consecuencias de mecanismos simples de selección de mejores respuestas desde el punto de vista de agentes racionalmente acotados con fuertes restricciones de acceso a la información.

Los mecanismos de aprendizaje propuestos en este trabajo, asumen que las firmas toman sus decisiones de oferta antes de conocer los parámetros de la demanda de mercado, las capacidades de producción de otras firmas y la cantidad de competidores. Las firmas entran al mercado simultáneamente ofreciendo distintas cantidades del producto homogéneo con el objetivo de extraer señales básicas dadas las características de la estructura de mercado. Utilizando los precios de mercado observados y sus beneficios obtenidos, cada firma intenta inferir las cantidades de producto que será conveniente ofrecer el próximo período.

Dentro del restringido conjunto de información disponible para cada firma, los datos que consideren relevantes para determinar las cantidades ofrecidas afectan el equilibrio de mercado

---

<sup>1</sup> Por ejemplo, en el caso teórico más sencillo de competencia de tipo Cournot, para determinar las cantidades a ofrecer que maximizarán sus beneficios, cada firma debe conocer la demanda del mercado, el número de competidores, y la predisposición de sus competidores a responder estratégicamente a sus acciones.

<sup>2</sup> Los trabajos de Leonard y Nishimura, (1999); Bischi, Chiarella y Kopel, (2002), investigan la convergencia a equilibrios de mercado en mercados duopólicos cuando los agentes asumen funciones de demanda que son incorrectas. Aunque estos modelos no incluyen mecanismos de aprendizaje que corrijan esta información errónea.

alcanzado. Estos equilibrios pueden resultar cercanos al resultado del modelo de Cournot o bien aproximarse al de competencia perfecta.

La motivación del trabajo se vincula con el enfoque de Riechmann (2002), Vriend (2000) y Vega-Redondo (1997) que utilizan teoría de juegos evolutivos para analizar las condiciones de estabilidad de los resultados de competencia de tipo Cournot<sup>3</sup>. Vega-Redondo (1997) muestra que bajo ciertas fuerzas evolutivas características de *social learning*, el único equilibrio de largo plazo es el equilibrio Walrasiano de competencia perfecta debido al llamado *spite effect*. Vriend (2000) expone que la “convergencia” a los precios y cantidades de equilibrio de competencia perfecta no se genera cuando *individual* en oposición a *social learning* tiene lugar<sup>4</sup>. Por último, Riechmann (2002), también asumiendo agentes racionalmente acotados, señala que distintos grados de racionalidad de las firmas las induce a jugar diferentes estrategias que pueden conducir al resultado Cournot-Nash o al de competencia perfecta. El autor da cuenta de que el grado de racionalidad de los agentes se relaciona directamente con la capacidad de jugar Cournot. Por ejemplo, los agentes pueden alcanzar un equilibrio Cournot-Nash si tienen un “grado de racionalidad media”, para lo cual deben conocer entre otras cosas su capacidad de influenciar el precio y la elasticidad de la demanda de mercado.

En los modelos del presente trabajo, el aprendizaje no tiene en cuenta la estrategia de los competidores y se asume que los agentes desconocen los parámetros y la forma de la demanda. Sin embargo, se destaca que las diferencias acerca de los resultados de equilibrio<sup>5</sup> pueden también obtenerse en *individual learning*, y guardan relación con la capacidad de memoria (o bien la *working memory capacity*<sup>6</sup>) implícita en los procesos de selección de las estrategias<sup>7</sup>. Se encuentra entonces que *individual learning* tiende a conducir a equilibrios en un entorno del resultado de Cournot cuando el proceso de selección se realiza con suficiente *working memory capacity*, permitiéndole a cada agente recordar y actualizar las últimas *fitness* que alguna vez fueron obtenidas para sus estrategias.

A continuación se exponen los mecanismos de aprendizaje propuestos y los modelos teóricos que se utilizan como referencia. Posteriormente se analizan los principales resultados de las simulaciones. Por último, se discuten las conclusiones y posibles extensiones del trabajo.

En el apéndice pueden encontrarse gráficos relacionados con las simulaciones y el código de Matlab que las reproduce.

---

<sup>3</sup> vía cantidades

<sup>4</sup> Estas caracterizaciones implican que las firmas consideran distintos conjuntos de observaciones para tomar sus decisiones.

<sup>5</sup> De Cournot o de competencia perfecta

<sup>6</sup> Miller (1956)

<sup>7</sup> “*The only difference is that their learning is based on a different set of observations.*” (Vriend N. J., 2000, p.10)

## Procesos de Aprendizaje Evolutivo

### Modelo “miope”

En una industria donde existen  $N$  firmas racionalmente acotadas que ofrecen un producto homogéneo, cada una intenta maximizar su beneficio tomando decisiones acerca de las cantidades,  $q_{imt}$ , a ofrecer en el mercado (en el momento  $m$  del período  $t$ ). Estas firmas conocen que sus propios beneficios están dados por la ecuación (1).

$$(1) \prod (q_{imt}) = (P_{mt} - c) q_{imt} \quad \text{con} \begin{cases} i = 1, 2, \dots, N \\ m = 1, 2, \dots, M \end{cases}$$

Se asumen entonces costos fijos nulos y costos marginales,  $c$ , constantes, conocidos por las firmas e iguales para todas (para simplificar la exposición). Las firmas deben tomar sus decisiones de oferta,  $q_{imt}$ , para cada uno de los próximos  $M$  momentos del período  $t$  desconociendo el precio de mercado al cual sus productos podrán ser vendidos. Cada firma necesita aprender que nivel de producto resultará conveniente ofrecer en el mercado, y este aprendizaje se hace a través de un algoritmo genético aplicado a sus respectivos conjuntos de información<sup>8</sup>. Las firmas cuentan con una colección finita de estrategias, reglas, con valores  $q_{rimt}$  inicialmente elegidos al azar<sup>9</sup>.

Para cada período  $t$  la firma  $i$  puede elegir una de sus posibles reglas<sup>10</sup>, que contienen cantidades a ofrecer en los siguientes  $M$  momentos.

$$(2) \text{reglas}_{it} : \begin{cases} \text{regla}(1)_{it} : [q_{i1t} & q_{i2t} & q_{i3t} & q_{i4t} & \dots & q_{iMt}] \\ \text{regla}(2)_{it} : [q_{2i1t} & q_{2i2t} & q_{2i3t} & q_{2i4t} & \dots & q_{2iMt}] \\ \dots\dots\dots & [\dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots] \\ \text{regla}(R)_{it} : [q_{Ri1t} & q_{Ri2t} & q_{Ri3t} & q_{Ri4t} & \dots & q_{RiMt}] \end{cases} \quad \text{con} \begin{cases} t = 1, 2, \dots, T \\ r = 1, 2, \dots, R \end{cases}$$

La regla que efectivamente adoptará la firma  $i$  durante el período  $t$  será la  $\text{regla}(1)_{it}$ . Una vez que las firmas eligen sus reglas, las cantidades ofrecidas en conjunto determinan el precio de mercado observado en cada momento. La inversa de la función demanda (desconocida por las firmas) da como resultado el precio de equilibrio observado<sup>11</sup>.

<sup>8</sup> Procedimientos con estas características son denominados por la literatura como *individual learning*, no se tuvo en cuenta la posibilidad de *social learning* ya que justamente se intenta explorar los resultados a los que pueden arribar las firmas con información sustancialmente escasa.

<sup>9</sup> Los valores de cada regla se extraen al azar de una distribución normal truncada en 0, con media y varianza dadas como parámetros del modelo.

<sup>10</sup> o cromosomas

<sup>11</sup> Una alternativa a este modelo es modelar cada regla con un conjunto  $M$  de bits elegidos al azar. Cada una tiene una interpretación directa en números enteros y representa la cantidad de producto ofrecida en

$$(3) P_{mt}(Q_{mt}) = a - b Q_{mt}^k \quad \text{con } b > 0, a > 0, k > 0, Q_{mt} = \sum_{i=1}^N q_{iimt}$$

Concluido el período  $t$ , las firmas observan el precio de mercado para cada momento  $m$  y calculan sus beneficios del período para determinar sus *fitness*, dadas por la ecuación (4)

$$(4) fitness_{rit} = \sum_{m=1}^M \prod (q_{rimt})$$

Las restantes reglas no utilizadas son percibidas como potenciales “estrategias” no aprovechadas y calculan los beneficios “contrafactuales” de las mismas tomando el precio observado del período como exógenamente determinado. La racionalidad acotada de los agentes es clave en este punto.

El éxito de cada regla se determina por la cantidad de beneficios, la *fitness*, que logra obtener a los precios  $P_{mt}$ . Cada firma reordena sus reglas en forma descendente según sus correspondientes *fitness* alcanzadas y la regla más exitosa de cada una se adopta para el siguiente período. Asimismo, las firmas exploran distintas alternativas potenciales para mejorar su *fitness* generando un nuevo conjunto de reglas a través de la implementación de un algoritmo genético. La dinámica evolutiva también tiene lugar a nivel firma, donde las peores reglas no se reproducen. La fuerza reproductiva (*crossover*) tiende a homogeneizar la población de reglas hacia las mejores que el agente conoce, mientras que otra fuerza evolutiva complementaria, la mutación, permite explorar variantes de las reglas generadas al azar. Esta última puede ser interpretada como errores de imitación (Alchian, 1950). Todos los períodos las firmas aplican operadores de “reproducción” (*crossover*) sobre dos de sus reglas<sup>12</sup> y de mutación sobre alguna de las  $q_{rimt}$  que componen su conjunto de posibilidades. Recombinando sus estrategias e incursionando en nuevas, los agentes intentan maximizar sus beneficios.

### Modelo con capacidad de memoria

Los resultados del modelo anterior resultan conocidos, las capacidades de las firmas son demasiado limitadas como para obtener beneficios sustancialmente distintos de cero. El supuesto de

---

el mercado en el período  $t$  por la firma que la adopta. Las simulaciones resultantes de este último modelo no difieren significativamente del analizado en este trabajo. De todas maneras, el modelo desarrollado fue seleccionado por que permite acotar el rango de valores entre los cuales el algoritmo explora potenciales ganancias en la *fitness* y porque las ventajas de la representación binaria frente a la de *real-values* no son claras (Whitley, 2001). En este sentido, el valor del parámetro de la desviación estándar del modelo desarrollado puede interpretarse como el grado de prudencia de las firmas. Para mayores detalles el programa alternativo puede ser solicitado.

<sup>12</sup> utilizando sus “descendientes” para reemplazar a las dos peores.

evaluar el resto de sus reglas con los precios observados, conjuntamente con la implementación de un proceso de selección sin memoria las conduce al previsible resultado.

Sin embargo, este modelo es la base para la incorporación de una variante no trivial. Si los agentes cuentan con suficiente memoria para recordar las *fitness* asociadas a estrategias<sup>13</sup> utilizadas en períodos anteriores, y las incorporan al proceso de selección de reglas, pueden lograr evadir el equilibrio de competencia perfecta sin coordinación alguna entre ellas (más que la propia observación de los precios de mercado que vinculan indirectamente sus decisiones).

El proceso durante el primer período,  $t$ , evoluciona igual al expuesto en el modelo anterior. Una vez asignados los beneficios supuestos en función del precio observado, cada firma elige una regla dentro de su conjunto de reglas disponibles para adoptar en  $t + 1$ .

Intuitivamente, la firma no confía que la mejor regla según su información actual sea la óptima y la elige con probabilidad alta pero menor a uno<sup>14</sup>. La información con la que cuenta en  $t$  la recordará en  $t + 1$  para elegir en función de un conjunto con información adicional su próxima regla de decisión. Cada regla puede ser adoptada por la firma con una probabilidad que depende de su *fitness* percibida hasta el momento. Se asume entonces que la elección de la regla a adoptar en el siguiente período es aleatoria de tipo torneo. Dos estrategias distintas del conjunto de reglas se toman al azar y se comparan sus *fitness* para elegir la regla ganadora  $regla^*(r)_{it} = \operatorname{argmax} \{fitness(regla(v)_{it}), fitness(regla(j)_{it})\}$ .

Durante el segundo período los agentes adoptan sus estrategias elegidas,  $regla^*(r)_{it+1}$ , y observan un nuevo conjunto de precios. En base a la nueva información, cada firma renueva la *fitness* correspondiente a su  $regla^*(r)_{it+1}$  adoptada.

Antes de comenzar el proceso de selección y renovación de reglas, cada firma recuerda el resto de las reglas de su conjunto de información y sus *fitness* asociadas. La capacidad de memoria de las firmas está determinada por la cantidad de reglas de las cuales dispone y la capacidad de recordar y actualizar las *fitness* asociadas a cada una (*working memory capacity*). De esta manera, su conjunto de información implícito se amplía con la experiencia.

Las firmas reordenan las reglas en función de las *fitness* asociadas para identificar las más exitosas. En este punto el algoritmo genético permite que las firmas seleccionen y determinen un nuevo conjunto de reglas. La fase de reproducción (*crossover*) obtiene dos descendientes de dos reglas seleccionadas al azar<sup>15</sup> que reemplazan a las peores del conjunto. La fase de mutación

---

<sup>13</sup> Se asume que los agentes recuerdan las últimas *fitness*  $r_{it}$  obtenidas por cada estrategia  $r$  y se las asignan independientemente que hayan introducido cambios en dichas reglas.

<sup>14</sup> Otra interpretación es que la firma comete errores en elegir la regla que resulta mejor en función de la información disponible. Menos errores comete si la regla es notoriamente superior.

<sup>15</sup> Se asume que las dos peores estrategias no pueden ser elegidas.

representa la alteración de alguna estrategia dentro de cierto rango<sup>16</sup>. Esta última permite que el agente considere nuevos valores para sus estrategias.

De este proceso surgen los nuevos conjuntos de reglas, es decir, las siguientes generaciones de estrategias para cada firma<sup>17</sup> con valores de *fitness* asociados (aquellos que el agente recuerda de sus “antecesores” inmediatos).

### Modelos de Referencia

Estos modelos no están relacionados con la lógica que las firmas utilizan para intentar maximizar sus beneficios, pero son relevantes para comparar los resultados de los distintos enfoques. Bajo el supuesto de agentes tomadores de precios en un contexto estático y dada la función inversa de demanda, ecuación (5), cada firma *i* maximiza sus beneficios de acuerdo a la ecuación (6).

$$(5) P(Q) = a - b Q^k \quad \text{donde } a = 15, b = 0.4 \wedge k = 0.36$$

$$(6) \prod(q_i) = (a - b Q^k) q_i - c q_i \quad \text{con } Q = \sum_{i=1}^N q_i$$

Como consecuencia, en el equilibrio de mercado las cantidades ofrecidas están dadas por la ecuación (7). Cada firma está dispuesta a aumentar su cantidad ofrecida hasta que el precio de mercado iguale su costo marginal, *c*.

$$(7) Q^* = \left( \frac{a - c}{b} \right)^{1/k}$$

Por otro lado, si las empresas tienen en cuenta su influencia en los precios de mercado, se obtiene un modelo de competencia de Cournot. La firma *i* maximiza su beneficio eligiendo,  $q_i$ , al tiempo que las cantidades ofrecidas por las demás firmas son  $q_{-i}$ .

$$(8) \prod(q_i) = \left[ (a - b (q_i + q_{-i})^k) - c \right] q_i$$

Asumiendo que las firmas conocen la demanda de mercado y la cantidad de competidores, se puede sostener un equilibrio de Cournot simétrico donde cada firma produce una cantidad  $q_i$  y no

---

<sup>16</sup> Se asume que las mutaciones son la alteración de algún valor existente de  $q_{rimt}$ . La alteración proviene de una distribución normal con media 0 y desvío estándar determinado a continuación en las simulaciones.

<sup>17</sup> La regla(1)<sub>*it+1*</sub> seleccionada en *t* para ser adoptada en *t+1* no sufre mutaciones.

encuentra incentivos para modificarla. Las cantidades ofrecidas se corresponden con un equilibrio de Nash, donde todas las conjeturas de las firmas son correctas, ecuación (9).

$$(9) q_i^* = \left[ \frac{a - c}{N^{k-1}(N + k) b} \right]^{1/k}$$

La cantidad de producto ofrecida en el mercado está dada entonces por la ecuación (10), y depende positivamente de la cantidad de firmas en el mercado.

$$(10) Q^+ = \left[ \frac{a - c}{(1 + k/N) b} \right]^{1/k}$$

Con el conocido resultado de ineficiencia de los mercados oligopólicos, el precio de equilibrio supera los costos marginales<sup>18</sup>,  $Q^* > Q^+$ .

Los valores correspondientes a estos cálculos son los que aparecen como valores de referencia en la tabla 1. Debe notarse que tanto en las simulaciones, como en el modelo teórico de Cournot, cuando la cantidad de firmas aumenta, el equilibrio converge al resultado de competencia perfecta.

## Principales Resultados

En el modelo con capacidad de memoria<sup>19</sup>, debe notarse que operan dos efectos potencialmente contrapuestos. El efecto inicial de asignarle a cada regla unos beneficios contrafactuales en función del precio observado (como si este fuera exógeno) que se diluye en los períodos subsiguientes por el efecto explicado a continuación. Cada regla efectivamente jugada tiene la oportunidad de corregir estas percepciones recordadas por el agente. A su vez, el conjunto de reglas cambia como resultado de la evolución de las estrategias y las *fitness* asociadas a cada una se también se corrigen a medida que son adoptadas.

Esta capacidad de memoria mínima que permite procesar las señales obtenidas hasta el período anterior garantiza que el resultado de equilibrio de mercado no sea el de competencia perfecta. Cada agente percibe así algunas restricciones y oportunidades impuestas por la estructura de mercado en la que compite. Como consecuencia, los resultados de equilibrio simulados se encuentran en un entorno del equilibrio de Cournot. Las simulaciones se comparan en la tabla 1.

---

<sup>18</sup> para todo  $N \neq \infty$

<sup>19</sup> con  $R > 1$



**Tabla 1:** Promedios obtenidos de las simulaciones realizadas con distintos valores de los parámetros de interés. Se muestran también los valores correspondientes de los modelos de referencia.

N	mem	Simulaciones			Valores de referencia				
		Promedio últimos 100 períodos			Competencia perfecta		Modelo de Cournot		
		$\Pi_t$	$P_t$	$Q_t$	P	Q	$\Pi$	P	Q
3	0	-2.7	4.00	9959.4			2855.4	5.18	7268.2
5	0	1.8	4.00	9955.1			1212.9	4.74	8208.7
10	0	-0.5	4.00	9958.7	4	8566.1	345.0	4.38	9025.7
17	0	0.2	4.00	9956.5			126.1	4.23	9394.3
25	0	0.2	4.00	9956.4			59.8	4.16	9569.7
40	0	-0.2	4.00	9959.4			23.8	4.10	9712.6
3	1	2948.4	5.25	7129.4					2855.4
5	1	1170.5	4.71	8272.6			1212.9	4.74	8208.7
10	1	376.7	4.42	8929.5	4	8566.1	345.0	4.38	9025.7
17	1	157.9	4.29	9243.1			126.1	4.23	9394.3
25	1	61.7	4.16	9556.6			59.8	4.16	9569.7
40	1	26.2	4.11	9687.0			23.8	4.10	9712.6

Nota: los parámetros de estas simulaciones son:  $m=6$ ,  $reglas=8$ ,  $b=0.4$ ,  $a=15$ ,  $k=0.36$ ,  $c=4$  y para la población,  $std= floor(0.05 * mean)$ ,  $media=round(4000/N)$ . Modelo “miope”,  $mem=0$  y modelo con capacidad de memoria  $mem=1$ . Todas las simulaciones tienen 8000 iteraciones, (aunque en algunos casos la estabilidad de los resultados se observa con un número sustancialmente menor de iteraciones) y son realizadas a partir de la misma *seed*. Otras simulaciones con distintas condiciones iniciales fueron realizadas, y los resultados agregados resultan robustos.

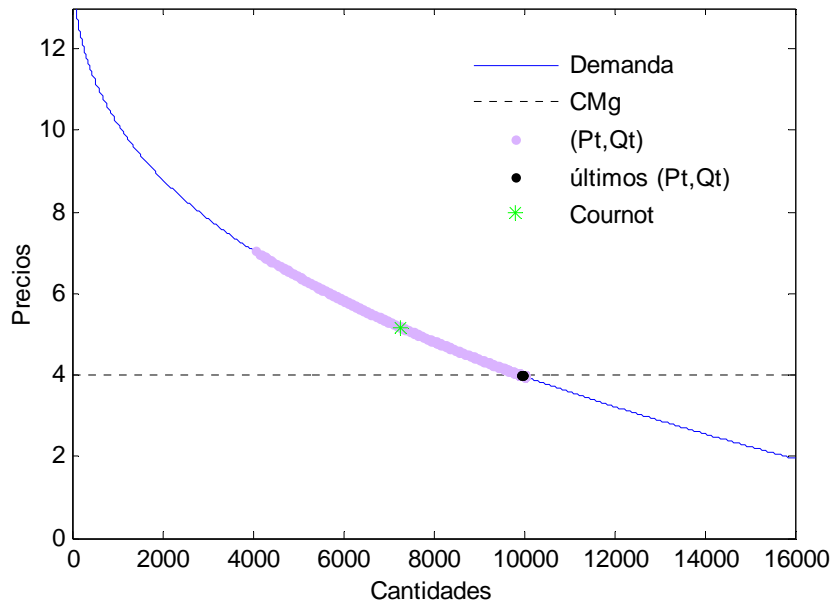
Si el agente elige alguna estrategia experimental para la que recordó una *fitness* relativamente alta<sup>20</sup> y esta reduce sus beneficios, el próximo período esa estrategia no estará entre las mejores y es probable que ni esa regla ni sus descendientes o mutaciones entren en el conjunto de reglas del próximo período. Por esta razón el resultado obtenido es cercano al equilibrio de Cournot.

Los siguientes gráficos muestran la demanda de mercado, los costos marginales y algunos de los resultados obtenidos en las simulaciones de la tabla 1. Se observan los sucesivos precios y cantidades promedio en donde las transacciones de mercado de llevaron a cabo para cada período  $t$ , ( $P_t$ ,  $Q_t$ ), las últimas 20 observaciones de estos mismos valores son identificadas con color negro. La ubicación del equilibrio de Cournot en cada una de las simulaciones está indicado.

<sup>20</sup> Dada la selección por torneo

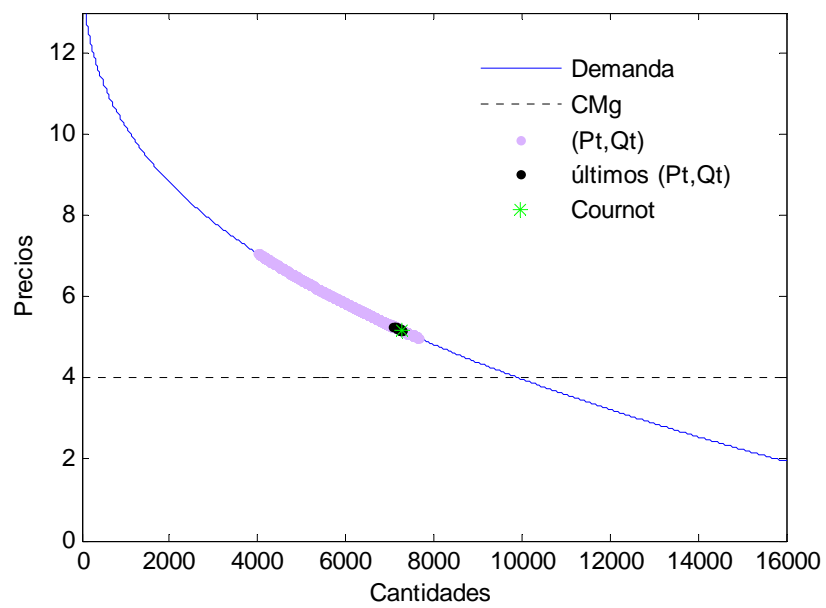
**Gráfico 1:** Evolución de las variables agregadas.

Parámetros  $N=3$ ,  $mem=0$

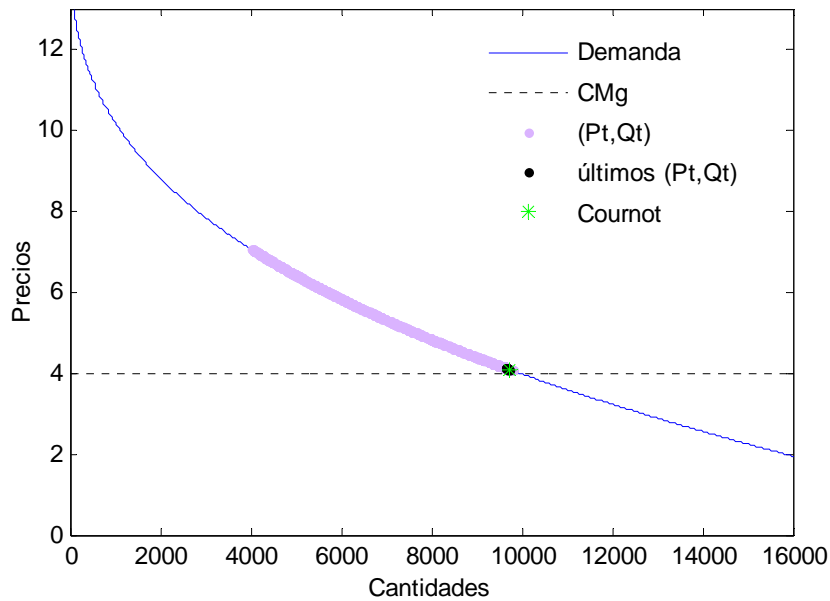


**Gráfico 2:** Evolución de las variables agregadas.

Parámetros  $N=3$ ,  $mem=1$



**Gráfico 3:** Evolución de las variables agregadas.  
Parámetros  $N=40$ ,  $mem=1$

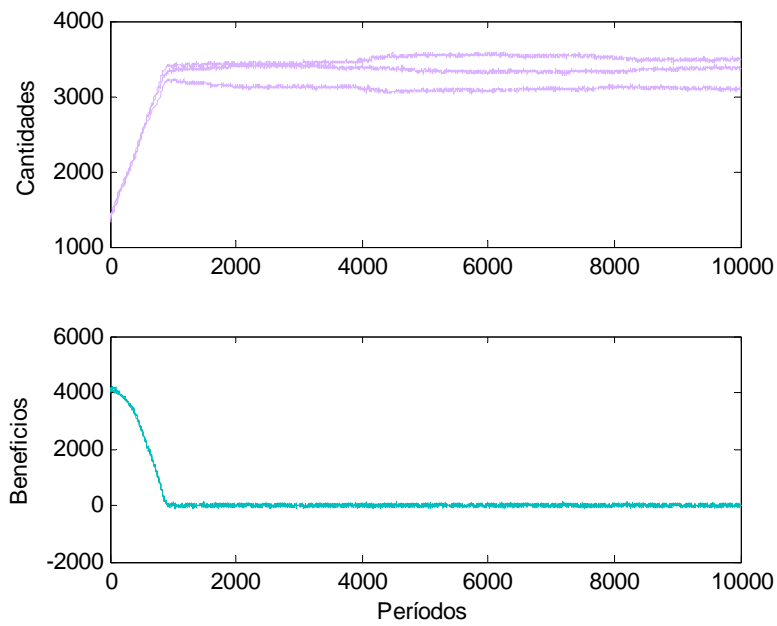


Asumiendo entonces que la firma ordena y evoluciona sus estrategias posibles, recordando los beneficios obtenidos para estrategias iguales o similares; es suficiente para que el equilibrio de mercado no sea el de competencia perfecta.

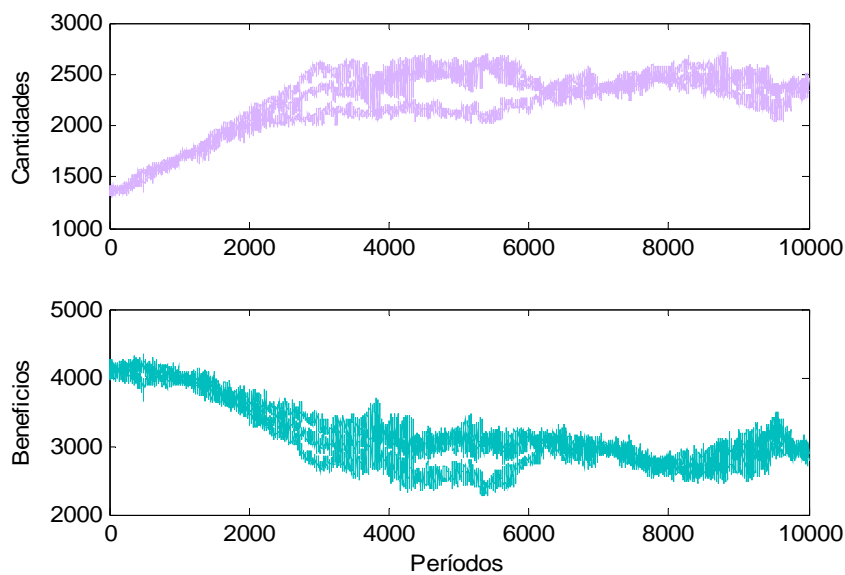
Se observa que para el modelo “miope” los equilibrios recorren valores en un entorno del equilibrio de mercado, mientras que cierta capacidad de memoria actúa en forma efectiva para mantener los equilibrios en un entorno del resultado de Cournot-Nash.

La estabilidad lograda por las estrategias seleccionadas se muestra en los siguientes gráficos de cantidades ofrecidas y beneficios para cada período.

**Gráfico 4:** Evolución de las cantidades ofrecidas y beneficios promedio obtenidos para cada firma.  
Parámetros  $N=3$ ,  $mem=0$ ,

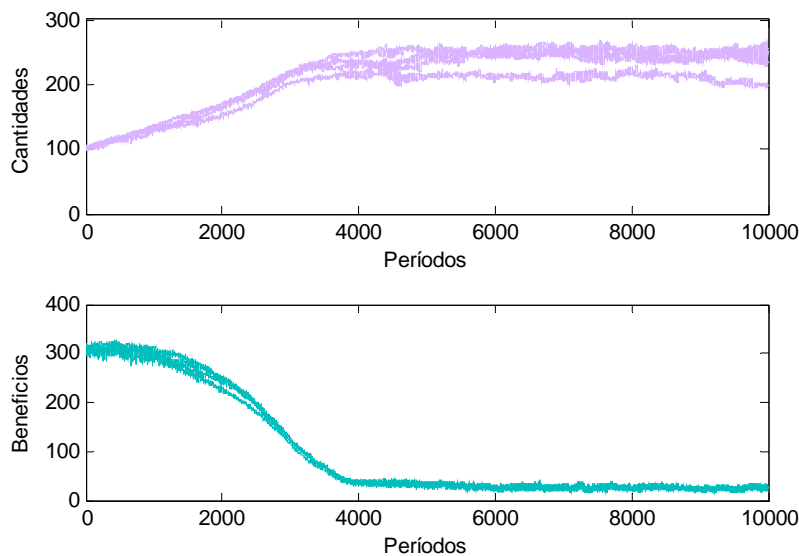


**Gráfico 5:** Evolución de las cantidades ofrecidas y beneficios promedio obtenidos para cada firma.  
Parámetros  $N=3$ ,  $mem=1$ ,



Los valores se mueven en un entorno del equilibrio de largo plazo debido a que el factor de mutación y reproducción de estrategias conjuntamente con la elección probabilística de las mismas, tiende a generar que cada firma pruebe nuevas reglas. Sin embargo las reglas encontradas “óptimas” no se alejan sustancialmente del equilibrio de Cournot. La variabilidad observada se relaciona con el nivel de desviación estándar permitida para las mutaciones, este parámetro se especifica en la nota de la tabla 1.

**Gráfico 6:** Evolución de las cantidades ofrecidas y beneficios promedio obtenidos para cuatro firmas. Parámetros  $N=40$ ,  $mem=1$ ,



Se observa que las reglas adoptadas tienden a ser diferentes entre las firmas. Asimismo, debe considerarse que las simulaciones utilizan números enteros para la elección de las  $q_{rimt}$ <sup>21</sup>. En este sentido debe distinguirse del modelo de Cournot utilizado como referencia, ya que los resultados calculados surgen de asumir un equilibrio simétrico entre las firmas<sup>22</sup>.

## Conclusiones

La utilización de algoritmos genéticos en el análisis de modelos como los propuestos permite diseñar procesos de aprendizaje que requieren relativamente poca información y algunas reglas generales (como la función de beneficios), para encontrar soluciones que sobrevivan en estos contextos.

De todas maneras, e independientemente de la estrategia de optimización utilizada<sup>23</sup>, los conjuntos de información en función de los que se toman las decisiones son importantes en cuanto a los resultados. En este sentido, aunque los objetivos de las firmas son los mismos en ambos modelos<sup>24</sup>, los resultados que obtienen son significativamente diferentes en función de la información que consideren relevante, o más precisamente, la que sean capaces de procesar y recordar.

<sup>21</sup> Los decimales en la tabla 1 se deben a que las cantidades agregadas se promedian en función del número de firmas y la cantidad de momentos.

<sup>22</sup> De todas maneras, se observa cierta convergencia en los beneficios promedio obtenidos para todas las firmas

<sup>23</sup> que fue muy similar para ambos modelos.

<sup>24</sup> en ambos modelos intentan maximizar sus beneficios dados por la ecuación N°

Es posible que en algunas industrias no sea sensato asumir que las firmas desconocen la cantidad de competidores en el mercado, pero en otros casos la cantidad de proveedores de un producto en un período determinado puede no ser *ex ante* una variable conocida con certeza<sup>25</sup>. Por otro lado, el supuesto de que las firmas desconocen los parámetros de la demanda es más plausible, ya que las condiciones que gobiernan la demanda de mercado no son cuestiones de sencilla predicción. Una extensión interesante puede ser la simulación de los resultados bajo demandas que fluctúan estacionalmente, tomando cada momento  $m$  como una estación diferente.

Es notable entonces que un conjunto de firmas racionalmente acotadas, con acceso sustancialmente restringido a la información puedan sostener beneficios por encima de cero en un contexto de competencia por cantidades. El modelo con capacidad de memoria muestra entonces un proceso de toma de decisiones sencillo e idéntico para todas las firmas<sup>26</sup> que les permite sostener beneficios en torno al resultado de Cournot sin realizar intercambios de información ni conocer los parámetros de la demanda. Las firmas solo necesitan recordar las *fitness* que conocían el período anterior y que estaban asociadas a estrategias relativamente similares a las que ahora integran sus conjuntos de reglas<sup>27</sup>.

---

<sup>25</sup> principalmente en economías abiertas o en general mercados influenciados externamente.

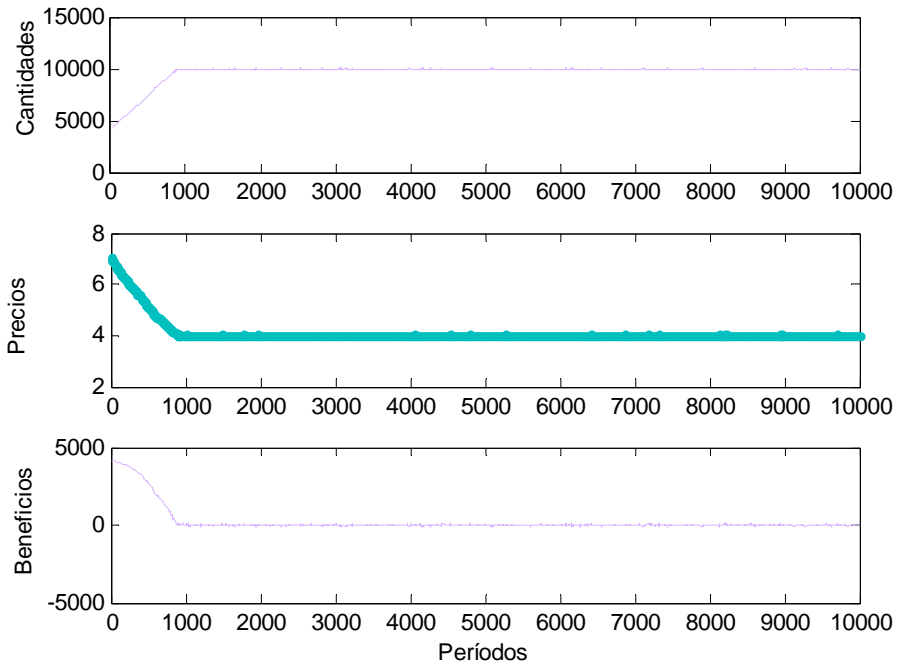
<sup>26</sup> Por ejemplo, cada firma observando sus propios datos, tiende a reducir su oferta hasta los niveles que estima más convenientes si sus beneficios resultan inusualmente bajos luego de haber aumentado las cantidades disponibles para la venta.

<sup>27</sup> Es decir, tampoco es necesario que recuerden regla exacta asociada a cada *fitness*.

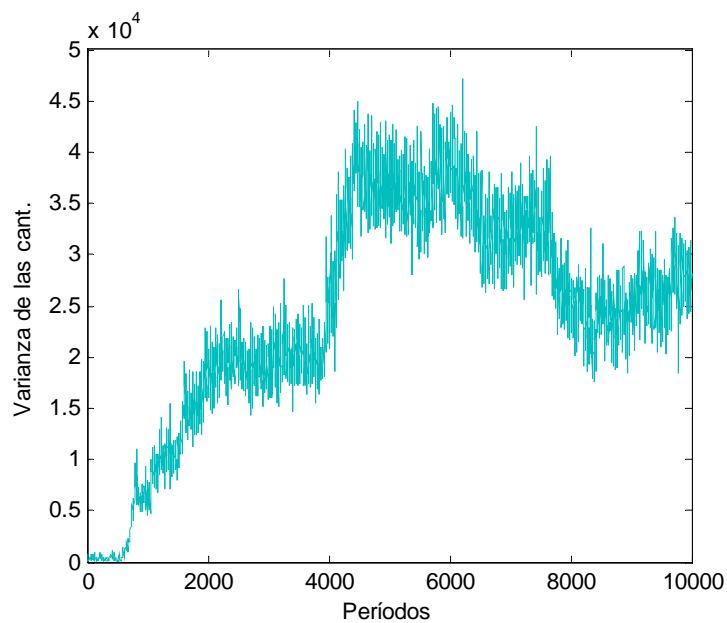
## Apéndice

A continuación se muestran algunos gráficos correspondientes a la evolución de las simulaciones de la tabla 1.

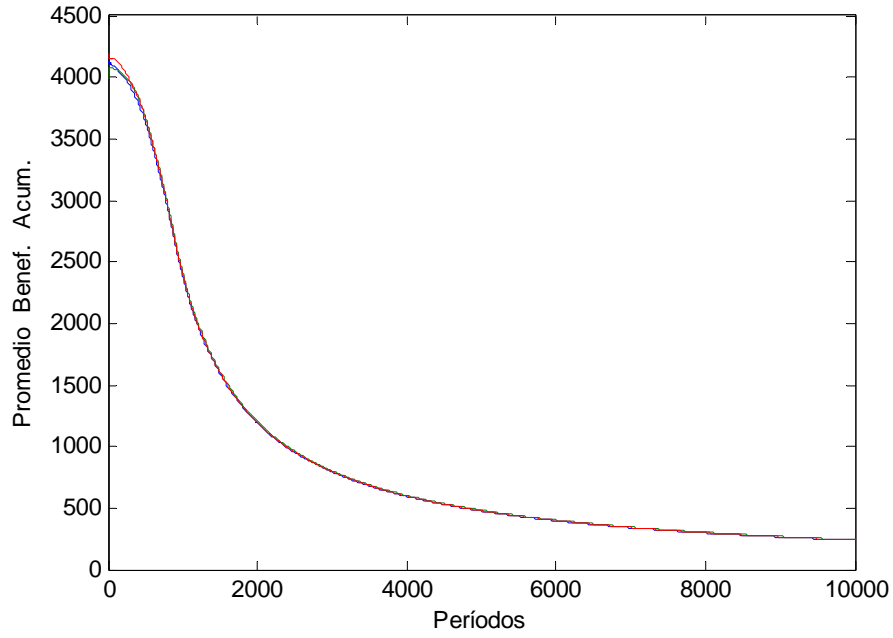
**Gráfico A1:** Cantidades, precios y beneficios promedio.  
Parámetros  $N=3$  y  $mem=0$



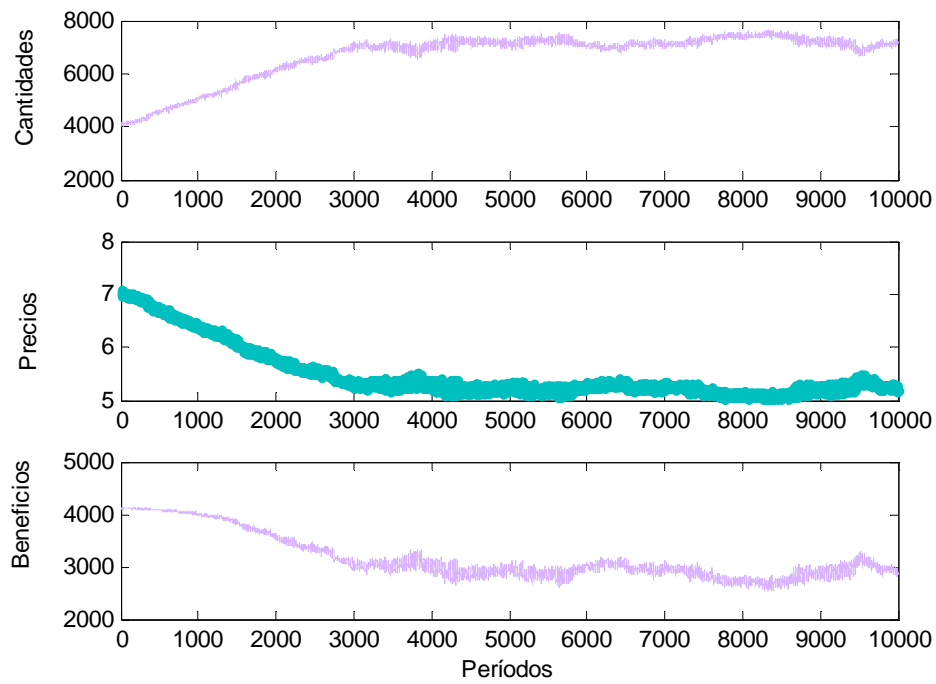
**Gráfico A2:** Varianza entre las cantidades ofrecidas por las firmas para cada período.  
Parámetros  $N=3$  y  $mem=0$



**Gráfico A3:** Evolución de los beneficios, promedios acumulados para cada firma.  
Parámetros  $N=3$  y  $mem=0$

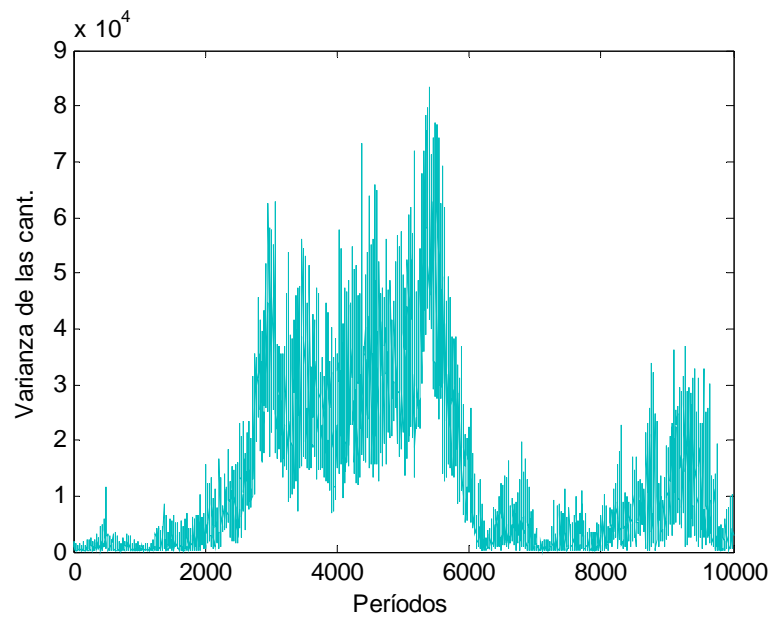


**Gráfico A4:** Cantidades, precios y beneficios promedio.  
Parámetros  $N=3$  y  $mem=1$

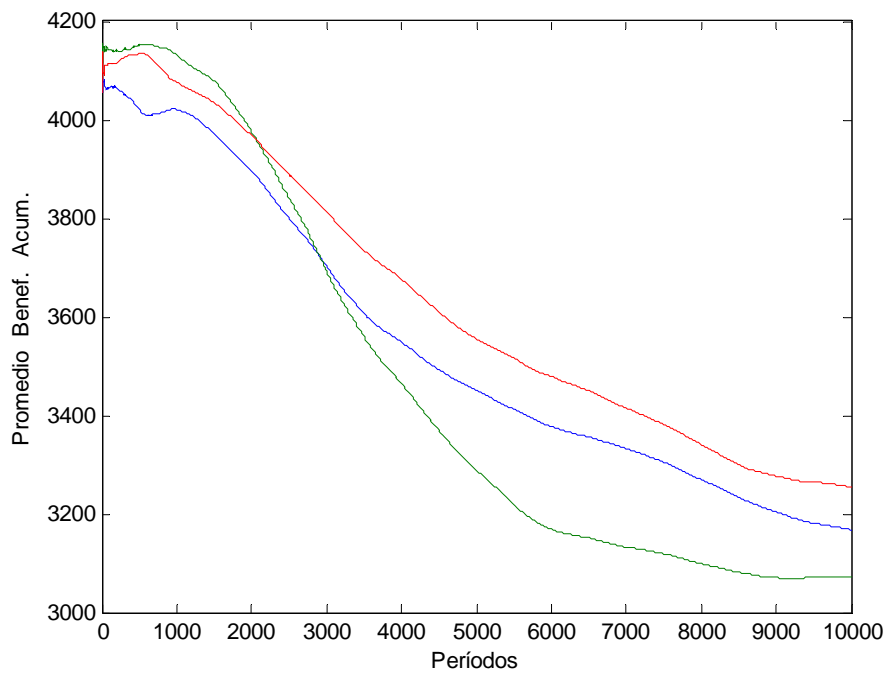




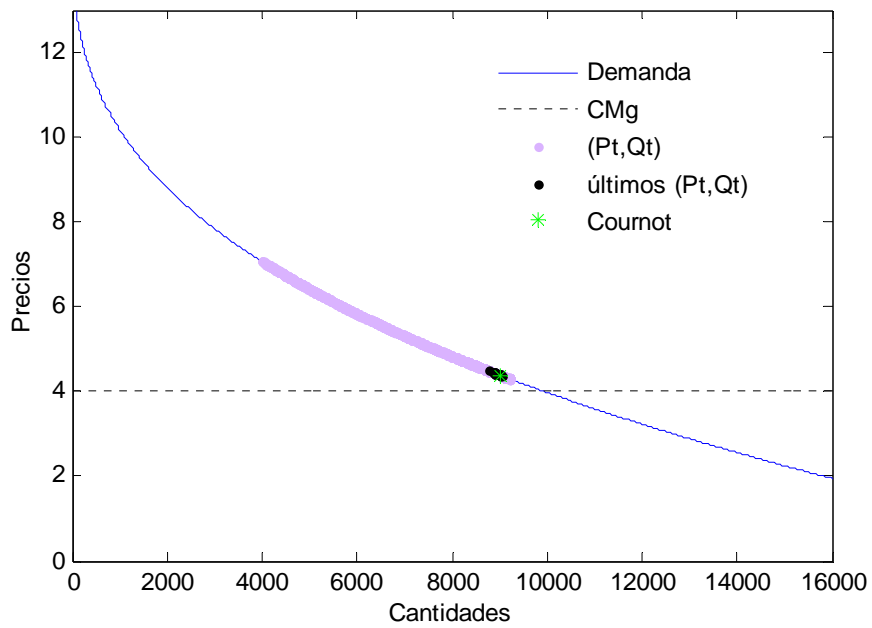
**Gráfico A5:** Varianza entre las cantidades ofrecidas por las firmas para cada período.  
Parámetros  $N=3$  y  $mem=1$



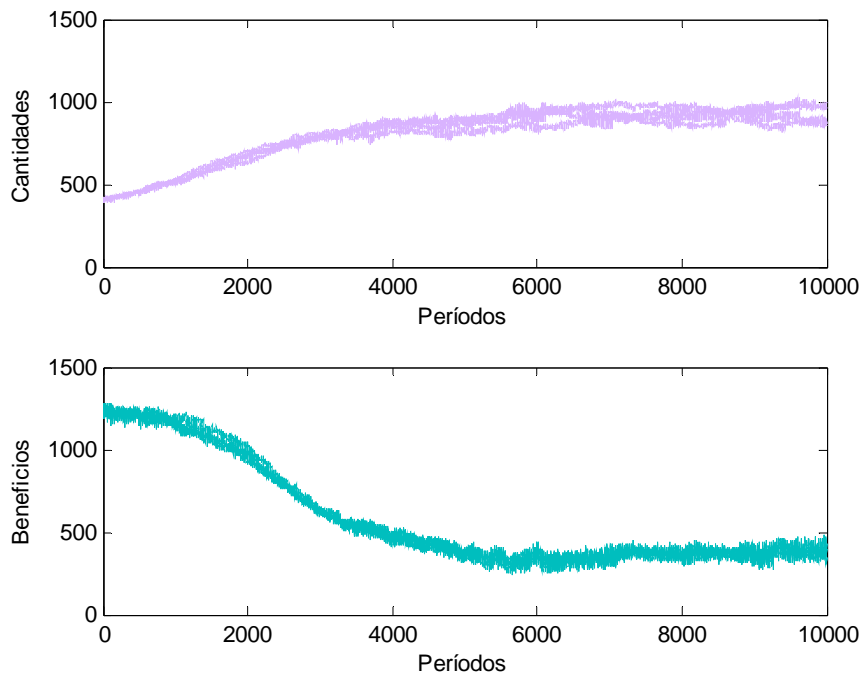
**Gráfico A6:** Evolución de los beneficios agregados, promedios acumulados para cada firma.  
Parámetros  $N=3$  y  $mem=1$



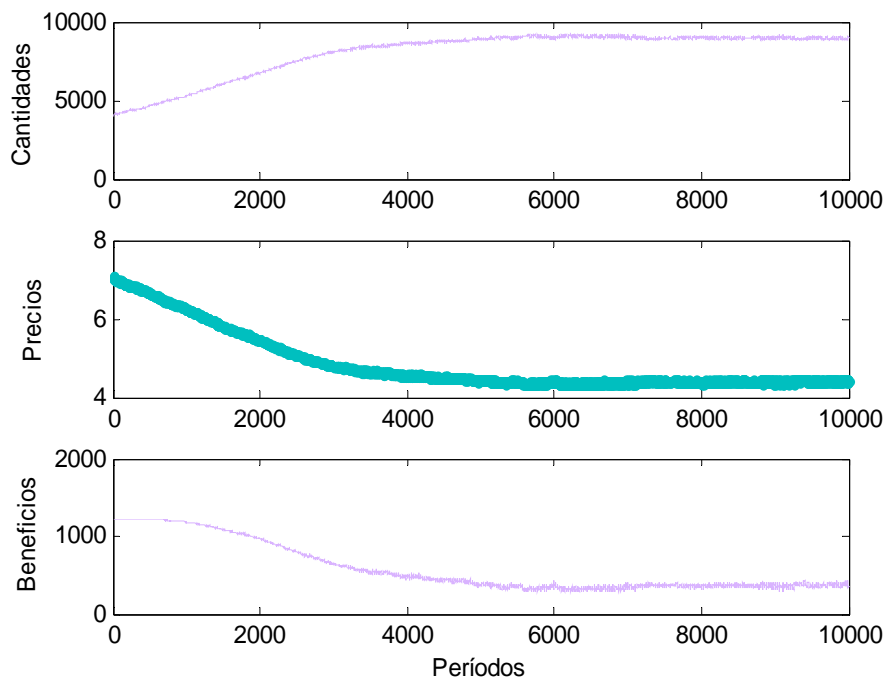
**Gráfico A7:** Evolución de las variables agregadas.  
Parámetros  $N=10$  y  $mem=1$



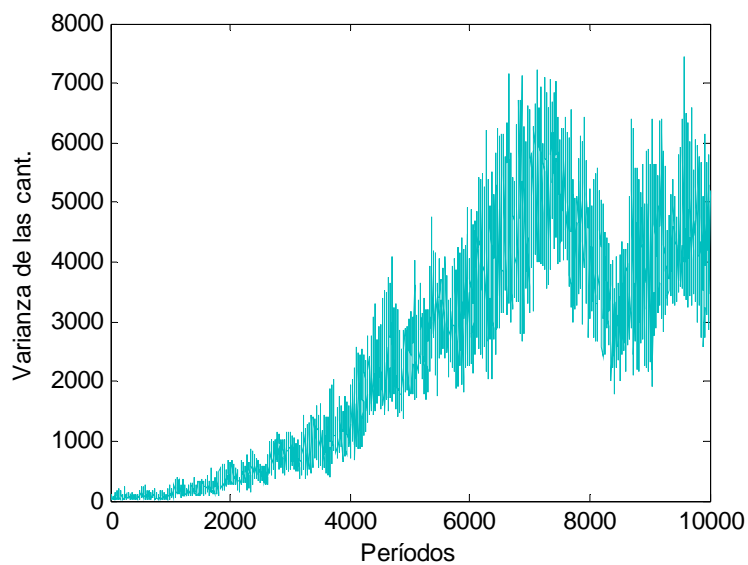
**Gráfico A8:** Evolución de las cantidades ofrecidas y beneficios promedio obtenidos para cuatro firmas. Parámetros  $N=10$ ,  $mem=1$



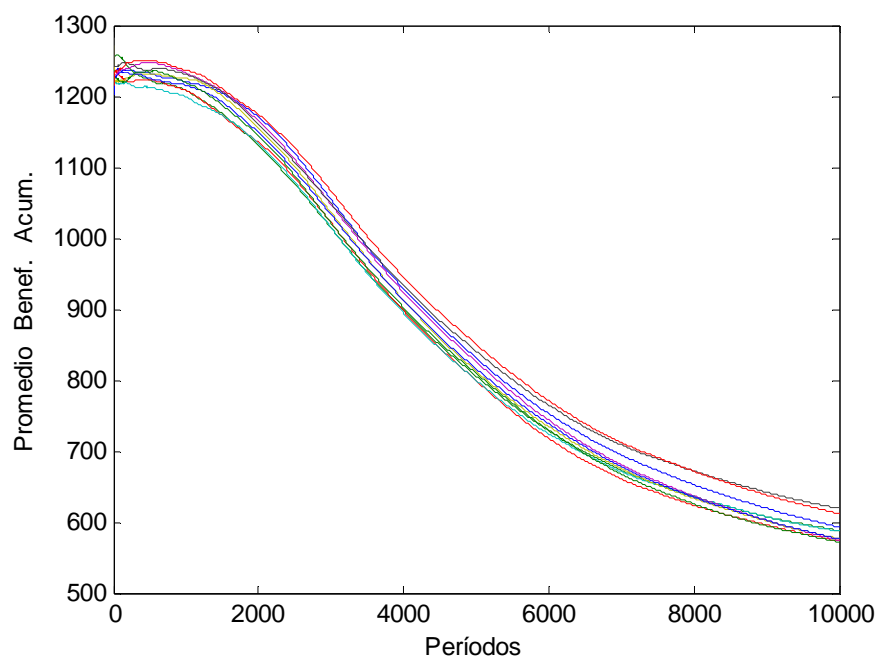
**Gráfico A9:** Cantidades, precios y beneficios promedio.  
Parámetros  $N=10$  y  $mem=1$



**Gráfico A10:** Varianza entre las cantidades ofrecidas por las firmas para cada período.  
Parámetros  $N=10$  y  $mem=1$



**Gráfico A11:** Evolución de los beneficios agregados, promedios acumulados para cada firma.  
Parámetros  $N=10$  y  $mem=1$



## Código de Matlab para las simulaciones

```
%%% market__GA %%%%%%%%%%

clear

global N days rules std mean b a k gen l
l=1;

format long g

N=input('# de firmas = ');

days=input('# de momentos (default=6)= ');
if isempty(days), days=6; end

rules=input('# de reglas (default=8)= ');
if isempty(rules), rules=8; end

gen=input('# de Iteraciones (default=200)= ');
if isempty(gen), gen=200; end

graf=input('Frecuencia de los gráficos (default = gen)= ');
if isempty(graf), graf=gen; end

mem=input('Capacidad de Memoria, 1 o 0 (default = 0)= ');
if isempty(mem), mem=0; end

mean= round(4000/N)

std= floor(0.05* mean)

mean=input('media (default=mean)= ');
if isempty(mean), mean=mean; end

std=input('desviación (default=std)= ');
if isempty(std), std=std; end

rand('state',0)

%Parámetros de la demanda desconocida para los productores
b=0.4
a=15
k=0.36

%costos marginales constantes
c=4

% población
firm = population(rules,days,std, mean, N);

% regla seleccionada
for i=1:N
firm(i).r = 1;
end

while l<=gen;
    l
    %cantidades ofrecidas al mercado
    output=firm(1).genome(firm(1).r ,:);
    for i=2:N
    output=firm(i).genome(firm(i).r,:) + output;
    end
end
```

```

%precio de mercado,

P= a * ones(size(output))- (output.^k) .*b;

if (l==1 | mem==0)
Pkron=kron(P,ones(rules,1));

%ingreso que los productores perciben para cada regla
for i=1:N
firm(i).income=firm(i).genome .* Pkron;
end

%costo de los productores
for i=1:N
firm(i).cost=firm(i).genome .* c;
end

%beneficios
for i=1:N
firm(i).surplus=firm(i).income - firm(i).cost;
end

% fitness
for i=1:N
firm(i).fitness=sum(firm(i).surplus, 2);
end

else

%ingreso que los productores perciben para cada regla
for i=1:N
firm(i).income(firm(i).r,:)=firm(i).genome(firm(i).r,:) .* P;
end

%costo de los productores
for i=1:N
firm(i).cost(firm(i).r,:)=firm(i).genome(firm(i).r,:) .* c;
end

%%beneficios
for i=1:N
firm(i).surplus(firm(i).r,:)=firm(i).income(firm(i).r,:) - ...
firm(i).cost(firm(i).r,:);
end

% fitness
for i=1:N
firm(i).fitness(firm(i).r,:)=sum(firm(i).surplus(firm(i).r,:), 2);
end

end

%Selección y evolución

for i=1:N
[sort_genome, sort_fitness] =sorted_GA(firm(i).genome, firm(i).fitness);
firm(i).sort_genome = sort_genome;
firm(i).sort_fitness = sort_fitness;
end

for i=1:N
firm(i).new_genome=firm(i).sort_genome;
j = randint(1,2,[1 (numel(firm(i).genome(:,1))-2)]);
if (j(1) ~= j(2))

```

```

[new1 new2] = chromo_cross(firm(i).sort_genome(j(1),:),
firm(i).sort_genome(j(2),:));
firm(i).new_genome(numel(firm(i).genome(:,1)), :)=new1;
firm(i).new_genome(numel(firm(i).genome(:,1))-1, :)=new2;
end
end

for i=1:N
j = randint(1,1,[2 numel(firm(i).new_genome(:,1))]);
firm(i).new_genome(j,:) = chromo_mutate(firm(i).new_genome(j,:));
end

%%%%%%%%%%
%data agregada

mean_output(1,1)=sum(output)/days;

mean_P(1,1)=sum(P)/days;

for i=1:N
firm(i).benef=firm(i).fitness(firm(i).r,1).*(1/days);
end

mean_benef(1,1)= sum([firm.benef], 2)/N;

if (mod(1,graf)==0)

%últimos datos

disp('*****Ultimas cantidades ofrecidas por período *****')
output_mean = mean_output((1-100):1,1)
output_mean_prom_ultimos_100 = sum(mean_output((1-100):1,:))/...
length(mean_output((1-100):1,1))
disp('*****Ultimos precios observados por período *****')
P_mean = mean_P((1-100):1,1)
P_mean_prom_ultimos_100=sum(mean_P((1-100):1,:))/ ...
length(mean_P((1-100):1,1))
disp('*****Ultimos beneficios promedio por período *****')
benef_mean = mean_benef((1-100):1,1)
benef_mean_prom_ultimos_100 = sum(mean_benef((1-100):1,:))/...
length(mean_benef((1-100):1,1))

%apendice

figure1 = figure('Color',[1 1 1]);
hold
subplot(3,1,1),plot(mean_output, '-', 'Color',[0.8549 0.702 1])
ylabel('Cantidades')
subplot(3,1,2), plot(mean_P,'-m.', 'Color',[0 0.749 0.749])
ylabel('Precios')
subplot(3,1,3),plot(mean_benef, '-', 'Color',[0.8549 0.702 1])
xlabel('Períodos')
ylabel('Beneficios')
drawnow
pause(5)
end

%%%evolución del equilibrio

if (mod(1,graf)==0)
[P_Cour, Q_Cour, Benef_Cour, Pperf, Qperf] =...
benchmark( a, b, k, c, N, mean_output, mean_P)
drawnow
pause(5)
end

```

```

%%Data por firma

for i=1:N
firm(i).payoff(1,1)=firm(i).fitness(firm(i).r,1)/days;
end

for i=1:N
firm(i).quant(1,1)=sum(firm(i).genome(firm(i).r,:))/days;
end

for i=1:N
firm(i).acum_var_quant=(firm(i).quant-(sum([firm.quant], 2)/N)).^2;
end

var_quant=sum([firm.acum_var_quant], 2)/N;

for i=1:N
firm(i).acum_average_payoff(1,1)= sum(firm(i).payoff)/ ...
length(firm(i).payoff);
end

if (mod(l,graf)==0)
disp('***** Evolución por firma, cantidades y beneficios promedio')
figure2 = figure('Color',[1 1 1])
subplot(2,1,1), plot([firm.quant], 'Color',[0.8549 0.702 1])
ylabel('Cantidades')
subplot(2,1,2), plot([firm.payoff], 'Color',[0 0.749 0.749])
ylabel('Beneficios')
xlabel('Períodos')
drawnow
pause(5)
end

%apendice
if (mod(l,graf)==0)
disp('*****Varianza de las cantidades medias por período')
subplot(1,1,1), plot(var_quant, 'Color',[0 0.749 0.749])
xlabel('Períodos')
ylabel('Varianza de las cant.')
drawnow
pause(5)
end

%Evolución para 4 firmas

if (mod(l,graf)==0)
if N>3
disp('***** Evolución para las primeras 4 firmas')
figure3 = figure('Color',[1 1 1])
subplot(2,1,1), plot(firm(1).quant, 'Color',[0.8549 0.702 1])
hold
for i=2:4
plot(firm(i).quant, 'Color',[0.8549 0.702 1])
xlabel('Períodos')
ylabel('Cantidades')
end

disp('*****Muestra: evolución para 4 firmas')
subplot(2,1,2), plot(firm(1).payoff, 'Color',[0 0.749 0.749])
hold

for i=2:4
plot(firm(i).payoff, 'Color',[0 0.749 0.749])
xlabel('Períodos')

```



```

        ylabel('Beneficios')
    end
else
end

end
drawnow
pause(5)
end

if (mod(l,graf)==0)
disp('***** Evolución del promedio de los beneficios acumulados')
figure4 = figure('Color',[1 1 1])
axes1 = axes(...
    'Position',[0.1098 0.1685 0.7952 0.7565],...
    'Parent',figure4);
axis([0 500 500 5000]);
box('on');
hold('all');
subplot(1,1,1), plot([firm.acum_average_payoff]);
ylabel('Promedio Benef. Acum. ');
xlabel('Períodos')
drawnow
pause(5)
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%historial
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

l=l+1;

for i=1:N
firm(i).genome=firm(i).new_genome;
end

for i=1:N
firm(i).fitness=firm(i).sort_fitness;
end
% nueva regla

for i=1:N
X=zeros(1,2);

while X(1)== X(2)
X = randint(1,2,[1 (numel(firm(i).genome(:,1)))]);
end

if firm(i).fitness(X(1))>=firm(i).fitness(X(2));
firm(i).r = X(1);
else
firm(i).r = X(2);
end

end

if mem==0
for i=1:N
firm(i).r = 1;
end
end

end

l=l-1;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function firm = population(rules, days, std, mean, N)

for i=1:N;
firm(1,1,i).genome= round(randn(rules,days)* std + mean);
end

%truncando en cero la distribución
for i=1:N
index=find(firm(1,1,i).genome<0);
firm(1,1,i).genome(index)=zeros(size(index));
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [sort_genome, sort_fitness] = sorted_GA(genome, fitness)

[s,indx] = sort(fitness, 'descend');
sort_genome = genome(indx, : );

sort_fitness = sort(fitness, 'descend');

end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Operador de Mutación

function chromo = chromo_mutate(chromol)
global std mean

len = length(chromol);
x = randint(1,1,[1 len]);
chromo = chromol;
chromo(x) = chromo(x) + round(randn(1) * std);
if (chromo(x)<0)
chromo(x)= 0;
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Operador de reproducción

function [new1 new2] = chromo_cross(chromol,chromo2)

len = length(chromol);
cutx = randint(1,1,[1 len]);
new1 = [chromol(1:cutx) chromo2(cutx+1 : len)];
new2 = [chromo2(1:cutx) chromol(cutx+1 : len)];

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [P_Cour, Q_Cour, Benef_Cour, Pperf, Qperf] = ...
benchmark( a, b, k, c, N, data_output, data_P)

global l

% Cournot-Nash equilibrio simétrico
Q_Cour=((a-c)/((1+(k/N))*b))^(1/k);
P_Cour=a-b*Q_Cour.^k;
Benef_Cour= P_Cour * (Q_Cour/N) - c * (Q_Cour/N);

```

```

%Si se asumen firmas tomadoras de precio:
Qd=[0:1:16000];
Pd=a-b*Qd.^k;
C=c*ones(size(Pd));
Qperf=((a-c)/b)^(1/k);
Pperf=a-b*Qperf.^k;

%Gráfico de ambos equilibrios

figure1 = figure('Color',[1 1 1]);
axes1 = axes(...
    'Position',[0.08108 0.1171 0.8649 0.8438],...
    'Parent',figure1);
axis([0 16000 0 13])
box('on');
hold('all');
plot(Qd, Pd)
plot(Qd, C, 'k:')

plot(...
    data_output, data_P,...
    'Color',[0.8549 0.702 1],...
    'LineStyle','none',...
    'Marker','.',...
    'MarkerSize',5,...
    'Parent',axes1);

%últimas 20 transacciones
plot(data_output((l-20):l,1), data_P((l-20):l,1), 'k. ');
%%%%%%%%

plot(...
    Q_Cour, P_Cour,...
    'Color',[0 1 0],...
    'LineStyle','none',...
    'Marker','*',...
    'MarkerSize',7,...
    'Parent',axes1);

xlabel('Cantidades')
ylabel('Precios');
legend1 = legend(...
    axes1,{'Demanda','CMg','(Pt,Qt)', 'últimos (Pt,Qt)','Cournot'},...
    'Position',[0.545 0.5886 0.3585 0.2913],...
    'XColor',[1 1 1],...
    'YColor',[1 1 1],...
    'EdgeColor',[1 1 1]);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

## Referencias

- Alchian, A. A. (1950). Uncertainty, evolution, and economic theory. *Journal of Political Economy*, 58:211–221.
- Ashlock, D. (2006). *Evolutionary computation for modeling and optimization*. New York. Springer.
- Bischi, G. y M. Kopel (2001), “Equilibrium Selection in an Nonlinear Duopoly Game with Adaptive Expectations,” *Journal of Economic Behavior and Organization* 46, 73-100.
- Bischi, G., C. Chiarella y M. Kopel (2002), “On Market Games with Misspecified Demand Functions: Long Run Outcomes and Global Dynamics,” Mimeo, Universidad de Urbino, University of Technology, Sidney, University of Technology Vienna.
- Chiarella, C. y A. Khomin, (1996), “An Analysis of the Complex Dynamics Behavior of Nonlinear Oligopoly Models with Time Delays,” *Chaos, Soliton & Fractals*, 7(12), 2049-2065.
- Eiben A.E. y J.E. Smith (2003). *Introduction to Evolutionary Computing*. Springer.
- Jason Barr & Francesco Saraceno, (2005). "Cournot Competition and Endogenous Firm Size". Documento de trabajo, Universidad Rutgers, Newark 2005-001, Departamento de Economía, Universidad Rutgers, Newark.
- Kopel, M. (1996). “Simple and Complex Adjustment Dynamics in Cournot Duopoly” *Chaos, Soliton & Fractals*, 7, 2031-2048
- Léonard, D. y K. Nishimura (1999). “Nonlinear Dynamics in the Cournot Model Without Full Information,” *Annals of Operations Research*, 89,165-173
- Markose S. M. (2005). "Computability and Evolutionary Complexity: Markets as Complex Adaptive Systems (CAS)," *Economic Journal*, Royal Economic Society, vol. 115(504), pages F159-F192, 06.
- Miller, G.A., 1956, *The Magical Number Seven, Plus or Minus Two: Some Limits on Our Capacity for Processing Information*. *Psychological Review* 101 (2), 343-352
- Mitchell, Melanie, (1996). *An Introduction to Genetic Algorithms*, MIT Press, Cambridge, MA.
- Puu, T. (1998), “The Chaotic Duopolists Revisited,” *Journal of Economic Behavior and Organization*, 33, 385-394.
- Riechmann, T. (2002), “Cournot or Walras? Agent Based Learning, Rationality, and Long Run Results in Oligopoly Games,” Univesidad Hannover, Documento de trabajo N°. 261.
- Sunder S. (2006). "Determinants of Economic Interaction: Behavior or Structure." *Journal of Economic Interaction and Coordination*. Vol. 1 No. 1 (2006); pp. 21-32.
- Vega-Redondo, F. (1997), “The Evolution of Walrasian Behavior,” *Econometrica*, 65, 375-384.
- Vriend, N. J. (2000). “An Illustration of the Essential Difference Between Individual and Social Learning, and its Consequences for Computational Analyses,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 24, 1-19.
- Whitley D. (2001). “ An Overview of Evolutionary Algorithms: Practical Issues and Common Pitfalls”. *Information and Software Technology*, Volume 43, Number 14, 15, pp. 817-831(15).